



HARMONİK VE GAUSSİAN GİRİŞLİ BELLEKLİ NONLİNEAR VOLTERRA SİSTEMLERİN ÇIKIŞ ÖZELLİKLERİ

Prof.Dr. Remzi YILDIRIM

2016-AYBÜ-ANKARA

HARMONİK VE GAUSSİAN GİRİŞLİ BELLEKLİ NONLİNEAR VOLTERRA SİSTEMLERİN ÇIKIŞ ÖZELLİKLERİ

THE OUTPUT PROPERTIES OF VOLTERRA SYSTEMS (NONLINEAR SYSTEMS WITH MEMORY) DRIVEN HARMONICS AND GAUSSIAN INPUTS

R.RICE AND E. BEDROSSIAN

Özet

İletişim sistemlerinde sıklıkla distorsiyon kaynaklanan bozulmalar meydana gelir. Sistemlerin geniş bir kesimi için bu tip bozulmalar Volterra serisi yardımıyla hesaplanabilmektedir.

Okuyucuya, sinüs dalgaları veya Gauss gürültüleri ile iletilen(nakledilen) sistemler için Volterra-serisi-tür-analizlerinin uygulanmasında, yardımcı olacak hem eski hem de yeni sonuçlar verilmiştir.

Analizlerde n .inci Volterra kernelinin, G_n n -katlı Fourier dönüşümü önemli bir rol oynar. Sistem eşitliklerinden G_n hesaplama metotları tanımlanmış ve birçok özel sistem göz önünde bulundurulmuştur. G_n bilindiğinde, çıkış hakkındaki ilginin parçaları, G_n in genel formüllerde yerine yazılarak Volterra serisinden türetilmesiyle elde edilebilir. Giriş iki veya üç sinüs dalgasının toplamı olduğunda ve güç spektrumu ve farklı momentler, giriş Gauss türünde olduğunda, bu parçalar çıkış harmonikleri için ifadeler içerir. Volterra serisinin sadece lineer ve kuadratik terimlerden oluşan durumlarına özel ilgi verildi.

1. GİRİŞ

Volterra Serileri ilk kez 1942 de Wiener tarafından doğrusal olmayan devre analizi içerisinde ortaya çıkartılmıştır. Wiener [1] daha sonra teoriyi genişletti ve FM spectrada kapsanan birtakım problemlere uyguladı. Wiener'in çalışmasından buyana konuyla ilgili bir çok rapor ve makaleler yazıldı.

Volterra serileri özellikle iletişim sistemlerindeki küçük (fakat zahametli) tahrifatların hesaplanmasında ve sonlarda amplifikatörlerin farklı türlerinde meydana gelen tahrifatın düzenlenmesinde kullanılmaktadır [2]-[6] . Bir FM sistemindeki filtreler yoluyla oluşan tahrifat da yine bir Volterra serisi olarak ifade edilebilmektedir.

Yazının konusu Okuyucuya, sinüs dalgaları veya Gauss gürültüleri ile iletilen(nakledilen) sistemler için Volterra-serileri-tür-analizlerinin uygulanmasında, yardımcı olacak hem eski hem de yeni sonuçlar vermektir. Bir FM sisteminde filtrelerden meydana gelen tahrifatların güç spektrumları için Mircea nın[7] mükemmel serilerini ve bunun, Mircea ve Sinnreich[5] tarafından Volterra serileri ile tanımlanan sistemlere genişletilmesini öğrendiğimizde bu makaleyi yazmamıza yön veren olaylar başladı. Mircea nın çalışmasından haberimiz yokken yayımladığımız [8]-[10] yazılarda, Mircea nın FM serilerinde ikinci ve üçüncü-cins modülasyon terimlerini verdik.(Proceedings of the IEEE nin editörü olarak) Mircea ile olan

mektuplaşmalarımız sonucunda bazı yeni fikirler ortaya çıktı. Makale bu fikirleri genişletmektedir.

Yazımızda, bazı konular farklı şekilde konu edilmekle beraber, 1955 de Deutsch[12] tarafında yazılan makaleye ve (biraz da) 1959 da George[13] tarafından yazılan rapora benzemektedir.

Volterra serisi, $X(t)$ girişinin gücünde doğrusal olmayan bir sistemin çıkışını ifade eden(taşıyan) “hafızalı güç serileri” olarak tanımlanmaktadır. İletişim problemlerinde çakışan sistemlerin bazıları Volterra serileri olarak ifade edilebilmektedir. Tipik bir sistem için seriyi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) \prod_{r=1}^n x(t - u_r) \quad \dots\dots\dots(1)$$

Burada, $y(t)$ çıkış, $x(t)$ giriş ve $g_n(u_1, \dots, u_n)$ kernelleri sistemi tanımlar.¹ Birinci seviye kernel $g_1(u_1)$, doğrusal bir ağına tepkisine benzer etkidir. Böylece yüksek seviye kerneller, lineer olmamanın farklı seviyelerinin karakterize edilmesini sağlayan, daha yüksek seviyeden etki tepkileri olarak görülebilmektedir.

(1) formülündeki $\frac{1}{n!}$ katsayısı çoğu yazarlar tarafından yazılmamaktadır. Bir çok eşitliğimizi basitleştirdiğinden dolayı biz yazdık. Bazı yazarlar kernellerin u_i ların simetrik olmayan fonksiyonları olmasına izin vermelerine rağmen, burada ele alınan sonuçlar için simetri gereklidir. Eğer bir sistemin tepkisi, (1) formülünün, simetrik olmayan bir g_n kerneli içeren bir serisi olarak elde edilebilirse g_n in hanesinde simetrizasyon ile elde edilebilir. Bu işlem, u_i ler üzerinde indislerin yerlerinin değiştirilmesinden ve g_n in $1/n!$ kere g_n sonucunun toplamı olarak alınmasından ibarettir.

n-katlı Fourier dönüşümü

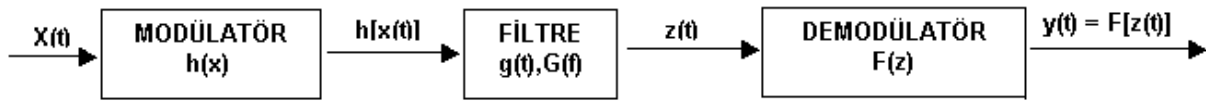
$$G_n(f_1, \dots, f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) \cdot \exp[-j(\omega_1 u_1 + \dots + \omega_n u_n)] \quad \dots\dots\dots(2)$$

burada $w_i = 2\pi f_i$ analizde önemli bir rol oynar. G_0 sıfırdır çünkü bizim Volterra serileri $n = 1$ den başlamaktadır. ($n = 0$ yerine bir aktif sistemi belirten $n = 1$ den başlıyor. Ör. Girişsiz bir çıkış). Yine $G_1(f_1)$, doğrusal bir ağına bilinen bir transfer fonksiyonu olarak kabul edilecektir. Böylece n . inci seviye Volterra kerneli, n .inci seviye transfer fonksiyonuna benzer görünür. $G_n(f_1, \dots, f_n)$ n .inci seviye Volterra transfer fonksiyonu. $g_n(u_1, \dots, u_n)$, $u_1, \dots, u_n$ lerin simetrik bir fonksiyonu olduğundan $G_n(f_1, \dots, f_n)$ fonksiyonu da $f_1, \dots, f_n$ lerin simetrik bir fonksiyonudur. III. Bölümde değinildiği üzere birçok durumda G_n , g_n in ilk hesaplaması olmadan elde edilebilir.

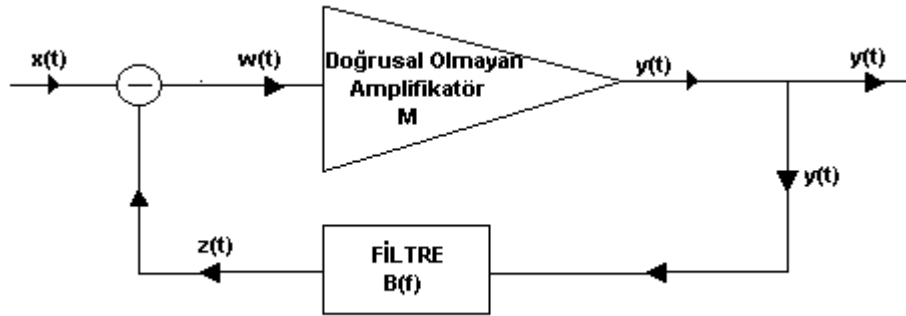
¹ $g_n(u_1, \dots, u_n)$ in argümanları ve bunun (2)deki Fourier dönüşümü $G_n(f_1, \dots, f_n)$ bazen anlam açık olduğunda kısalık açısından atlanacaktır.

Kabul edelim ki $G_n, n=1,2,\dots$, belli bir sistem için bilinsin. Yine (1) deki sistem için $x(t)$ girişi; **1)** bir veya iki sinüs dalgası. **2)** Gauss gürültüleri. **3)** bir sinüs dalgası artı Gauss gürültüleri veya **4)** rasgele bir nabız silsilesi. den oluşsun. Sonra $y(t)$ için Volterra serilerinden türetilen formüllerde G_n yerine yazarak, $y(t)$ çıkışı hakkında bazı ifadeler elde edebiliriz. II.Bölümde bu formüllerin bazı öncü terimleri listelenmiştir. Bu liste sonraki bölümde türetilen formüllerle bir rehber olarak genişletilmiştir.

Tüm formüller sonsuz serilerdir. Çok şükür ki iletişim sistemlerindeki çalışmalarda ikinci veya üçüncü mertebenin üzerindeki modülasyon terimlerini ihmal etmek genelde mümkündür.



Şekil1. Modulator-Filtre-Demodulator Sistemi



Şekil2. Doğrusal olmayan amplifikatörle feedback sistemi

Pratikte Volterra serisi, diğer tarafta yapılmamış hiçbir şeyi yapmamıza imkan tanımaz. Bununla beraber modülasyon problemleri cebirin bir bataklığına götürür. Volterra serileri yaklaşımıyla, birçok problem, ilkin G_n hesaplanması sonra da bunların genel formülde yerine yazılması yoluyla işleminden geçirilebilmektedir.

Kolaylık açısından yazı iki ana kısma ayrılmıştır: **1)** Sonuç ve örneklerin ifadesi **2)** Formüllerin türetilmesi. Bu giriş, başlıca sonuçların öncü terimlerinden oluşan bir özet form takip etmektedir. Bundan sonra birçok sistem türü için $G_n(f_1, \dots, f_n)$ Volterra transfer fonksiyonlarının hesaplanması için metotlar verilmiş ve son olarak da formüllerin kullanımını tarif etmek için bazı örnekler çözülmüştür. Bunların arasında Şekil1 de verilen genel sistem, FM tahrifatları için Mircea serilerindeki öncü terimleri elde etmek için kullanıldı ve Şekil2 deki doğrusal olmayan sistem son zamanda Narayanan[6] tarafından işlenmiştir.

İkinci bölüm çoğunlukla değişik sonuçların türevlerinden oluşmaktadır. Çıkış ve bunun bazı girişler için olan spektrumu hakkında ifadeler içermektedir. Ek olarak daha yüksek seviye momentleri, yayılma çıkışının birikimleri için ifadeler elde etmek için, bir Gauss tipi giriş durumu için göz önüne alındı. Formüller, birikimler bilindiğinde $y(t)$ nin yoğunluk ihtimali hakkında verdikleri bilgiye göre listelenmiştir. Kuadratik formların yayılmasında bilinen sonuçların ilgisi, $y(t)$ nin yoğunluk ihtimali için bir ifade elde etmek için uygulanmıştır. $y(t)$ için Volterra serisinde $x(t)$ Gauss tipinde ve terimler ikiden öte olduğunda atlanmıştır.

2. FORMÜLLERDEKİ ÖNCÜ TERİMLER

Bu bölümde G_n Volterra transfer fonksiyonları bilindiğinde, bazı $x(t)$ girişleri için $y(t)$ çıkışı hakkında bilgi veren formüllerin öncü terimleri listelenmektedir. Listelenen öncü terimlerin çoğunluğu $G_3(f_1, f_2, f_3)$ den öteye gitmez. Bu arada G_n simetriktir.

Sonraki bölümlerde verilen formüllerle liste rehberine genişletilmiştir. Öncü terimler genelde yeterlidir. Gerçekten de okuyucu, tüm formüllerden pratikte fazla bir yardım beklememelidir. Genelde bu bölümde listelenenlerden öte sadece iki veya üç terim, hız artırma güçlüğünden dolayı günümüz bilgisayarlarıyla kullanılabilmiştir.

A. Sinüsodal Girişler.

$x(t) = P \cos pt$ olduğunda, (137) aşağıdaki tüm seri ifadeyi verir verdiğinde,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{p}{2} \right)^n \frac{\exp[j(2k-n)pt]}{k!(n-k)!} G_{k,n-k}(f_p) \quad \dots\dots\dots(3)$$

Burada $p = 2\pi f_p$ ve $G_{k,n-k}(f_p)$ de $G_n(f_1, \dots, f_n)$ yi ifade etmektedir. f_i nin ilk k siyle f_p ye eşittir ve kalan $n-k$ da $-f_p$ ye eşittir. Gelecek bölümde hafızasız doğrusal olmamanın örneği için (23) gösterir ki $G_n(f_1, \dots, f_n)$ bir a_n sabiti haline çevrilir ve (3) serisi p ve a_n göre yakınsak veya ıraksak olabilir. (3) deki öncü terimler,

$$\begin{aligned} y(t) = & \left[\frac{p^2}{4} G_2(f_p, -f_p) + \dots \right] + e^{jpt} \left[\frac{p}{2} G_1(f_p) + \frac{p^3}{16} G_3(f_p, f_p, -f_p) + \dots \right] + e^{j2pt} \left[\frac{p^2}{8} G_2(f_p, f_p) + \dots \right] \\ & + e^{j3pt} \left[\frac{p^3}{48} G_3(f_p, f_p, f_p) + \dots \right] + e^{-jpt} \left[\frac{p}{2} G_1(-f_p) + \frac{p^3}{16} G_3(-f_p, -f_p, f_p) + \dots \right] \\ & + e^{-j2pt} \left[\frac{p^2}{8} G_2(-f_p, -f_p) + \dots \right] + e^{-j3pt} \left[\frac{p^3}{48} G_3(-f_p, -f_p, -f_p) + \dots \right] + \dots \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

$x(t) = P \cos(pt + \phi)$ olduğunda (3) ve (4) ifadelerinde, üslerde pt yerine $(pt + \phi)$ yazılması $y(t)$ yi verir.

p ve q orantılı değilken, $x = P \cos pt + Q \cos qt$ olduğunda $y(t)$ nin, $\exp[j(Np + Mq)t]$ bileşeni için tüm seriler (139) da verilmiştir. dc deki öncü terimler ve $y(t)$ nin bazı düşük seviyeli bileşenleri (5) dedir.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p^2}{4} G_2(f_p, -f_p) + \frac{Q^2}{4} G_2(f_q, -f_q) \right] \\ & \left[e^{jpt} \left[\frac{p}{2} G_1(f_p) + \frac{p^3}{16} G_3(f_p, f_p, -f_p) + \frac{pQ^2}{8} G_3(f_p, f_q, -f_q) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{jpt} \frac{p^2}{8} G_2(f_p, f_p) \\
& e^{j(p+q)t} \frac{PQ}{4} G_2(f_p, f_q) \\
& e^{j(2p+q)t} \frac{P^2Q}{16} G_3(f_p, f_p, f_q)
\end{aligned} \tag{5}$$

$\exp[j(p+q)t]$ bileşeninde q ve f_q nin işaretlerinin değiştirilmesiyle $\exp[j(p-q)t]$ ifadesi elde edilir vesaire. p ve q orantılı iken bileşenlerin bazıları çakışır(birleşir). Örneğin, eğer $q = 2p$ ise ve $x = P \cos pt + Q \cos 2pt$, $2p - q$ ve $-2p + q$ terimleri, yeni dc bileşenlerinde öncü terimler vermek için (5)deki dc terimleriyle bir araya getirilirse,

$$\left[\frac{p^2}{4} G_2(f_p, -f_p) + \frac{Q^2}{4} G_2(2f_p, -2f_p) + \frac{P^2Q}{16} G_3(f_p, f_p, -2f_p) + \frac{P^2Q}{16} G_3(-f_p, -f_p, 2f_p) \right] \dots\dots\dots(6)$$

Benzer şekilde (5) de $\exp(jpt)$ bileşeninin toplamı olarak verilen yeni $\exp(jpt)$ deki öncü terimler $f_q = 2f_p$ ile, $q = 2p$ olduğunda $(-p+q)$ teriminin katkısı olan.

$$e^{jpt} \frac{PQ}{4} G_2(-f_p, 2f_p) \dots\dots\dots(7)$$

Bu $(-p+q)$ terimi, $(p+q)$ teriminden p ve f_p nin işaretlerinin değiştirilmesiyle elde edilmekte ve sonra $q = 2p$ ile $f_q = 2f_p$ yerleştirilir.

$x(t) = P \cos pt + Q \cos qt + R \cos rt$ olduğunda $y(t)$ nin $\exp[j(Np + Mq + Lr)t]$ bileşeni için tüm seriler (140) ile verilmiştir. Örneğin $y(t)$ nin $\exp[j(p+q+r)t]$ bileşeni için öncü terimi,

$$e^{j(p+q+r)t} \frac{PQR}{8} G_3(f_p, f_q, f_r) \text{ dir.} \dots\dots\dots(8)$$

r ve f_r nin işaret değişimi, $\exp[j(p+q-r)t]$ bileşenindeki öncü terimi verir vesaire.

$x(t)$ bazı sinüsodal bileşenlerin sonlu toplamına eşit olduğunda $X(f)$ Fourier dönüşümüne sahiptir. i.e.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} X(f) df \quad \omega = 2\pi f \dots\dots\dots(9)$$

sonra (1)de yerine yazılması, $y(t)$ ve bunun Fourier dönüşümü $Y(f)$ aşağıdaki gibi verildiğini gösterir.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} df_n G_n(f_1, \dots, f_n) \cdot e^{j(w_1, \dots, w_n)t} \prod_{r=1}^n X(f_r)$$

$$Y(f) = \frac{1}{1!} G_1(f) X(f) + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 G_2(f_1, f - f_1) X(f_1) X(f - f_1) \\ + \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 G_3(f_1, f_2, f - f_1 - f_2) X(f_1) X(f_2) X(f - f_1 - f_2) + \dots \dots \dots (10)$$

B. Gauss Tipi Gürültü Giriş.

$\langle y(t) \rangle$ için (147)deki tüm serilerdeki öncü terimler aşağıdadır.

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{1!2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) G_2(f_1, -f_1) + \frac{1}{2!2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) G_4(f_1, -f_1, f_2, -f_2) + \dots \dots (11)$$

$\langle y^2(t) \rangle$ için (177)deki tüm serilerdeki öncü terimler aşağıdadır.

$$\langle y^2(t) \rangle = \langle y(t) \rangle^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) G_1(f_1) G_1(-f_1) \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) [G_1(f_1) G_3(-f_1, f_2, -f_2) + \frac{1}{2} G_2(f_1, f_2) G_2(-f_1, -f_2) + \dots \dots \dots (12)$$

Üçlü integralde kapsanan (12) de gösterilmeyen üçüncü seviye terim ikinci cumulant $K_2 = \langle y^2(t) \rangle - \langle y(t) \rangle^2$ için (180)de verilmiştir. $\langle y^2(t) \rangle$ nın tam serileri (152),(156)-(158) de verilen $\langle y(t+\tau)z(t) \rangle$ nin tam serisinin özel bir halidir. Burada $z(t), y(t)$ için (1) serisinden elde edilen bir Volterra serisi ile $g_n(u_1, \dots, u_n)$ yerine yazılmasıyla farklı bir kernel $g'_n(u_1, \dots, u_n)$ olarak tanımlanmıştır. $y(t)$ ve $z(t)$ her ikisi de aynı Gauss tipi $x(t)$ girişine sahiptir. (157)de çıkan $G'_n(u_1, \dots, u_n), g'_n(u_1, \dots, u_n)$ nin Fourier dönüşümüdür. $y(t)$ nin yoğunluk olasılığı için birinci cumulant

$K_1 = \langle y(t) \rangle$, ikincisi $K_2 = \langle y^2(t) \rangle - \langle y(t) \rangle^2$ ve (180)den K_3 ve K_4 deki öncü terimler aşağıdadır.

$$K_3 = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) G_1(f_1) G_1(f_2) G_2(-f_1, -f_2) + \dots$$

$$K_4 = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 \int_{-\infty}^{+\infty} df_3 W_x(f_1) W_x(f_2) W_x(f_3) G_1(f_1) G_1(f_2) \\ \cdot [G_1(f_3) G_3(-f_1, -f_2, -f_3) + 3G_2(-f_1, f_3) G_2(-f_2, -f_3)] + \dots \dots \dots (13)$$

(13) de gösterilen ifadelerden sonra gelecek terimler (180) de verilmiştir, fakat K_3 ve K_4 için serilerin genel formları bilinmemektedir. $y(t)$ nin yoğunluk olasılığı hakkında bilgi elde etmek için ilk dört K(cumulants) nın kullanımı II.Bölümde tartışılmış ve (84) bir örnek verilmiştir.

$y(t)$ 'nin çift taraflı güç spektrumu $W_y(f)$ 'i için Mircea-Sinnreich [5] deki öncü terimleri aşağıdadır.

$$W_y(f) = \langle y(t) \rangle^2 \delta(f) + W_x(f) \left| G_1(f) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) G_3(f, f_1, -f_1) + \dots \right|^2 \\ + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) W_x(f - f_1) |G_2(f_1, f - f_1) + \dots|^2 \\ + \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) W_x(f - f_1 - f_2) |G_3(f_1, f_2, f - f_1 - f_2) + \dots|^2 + \dots \quad \text{.....(14)}$$

Burada $\langle y(t) \rangle$, (11) de verilen $y(t)$ 'nin dc bileşeni ve $\delta(f)$ birim etki (tesir) fonksiyonudur. (14) ün sağ tarafı tüm ikinci seviye terimleri gösterir fakat bazıları üçüncü-seviye terimlerdir. Eğer (14)ün iki katlı integrali G_5 i ve tek katlı integrali G_4 ü içerir de kesin değer uygun şekilde ikinci ve üçüncü satırlara eklenirse, tüm üçüncü seviye terimler ve bazı dördüncü ve beşinci seviyeler gösterilebilir.

C. Sinüs Dalgası artı Gürültü Giriş.

Aşağıda, giriş $x(t) = P \cos pt + I_N(t)$ dir

$$\langle y(t) \rangle = \left[\frac{P^2}{4} G_2(f_p, -f_p) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_1(f_1) G_2(f_1, -f_1) + \dots \right] \\ + e^{jpt} \left[\frac{P}{2} G_1(f_p) + \frac{P^3}{16} G_3(f_p, f_p, -f_p) + \frac{P}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_1(f_1) G_3(f_1, -f_1, f_p) + \dots \right] \\ + e^{j2pt} \left[\frac{P^2}{8} G_2(f_p, -f_p) + \frac{P^2}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_1(f_1) G_4(f_1, -f_1, f_p, f_p) + \dots \right] \\ + e^{j3pt} \left[\frac{P^3}{48} G_3(f_p, f_p, f_p) + \dots \right] + \dots + \{ e^{jkpt} [\dots] \}. \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{.....(15)}$$

burada $f_p = \frac{p}{2\pi}$ dir. $I_N(t)$ sıfıra özdeş olduğunda $W_1(f)$ sıfırdır ve $x = P \cos pt$ olduğunda (15) $y(t)$ 'i için (4) e sadeleşir. P sıfır, $x(t)$ Gauss tipi olduğunda, (15), $\langle y(t) \rangle$ için (11) e sadeleşir.

$y(t)$ 'nin güç spektrumu için tüm ifade (175) de verilmiştir. Burada gösterilen öncü terimler,

$$W_y(f) = \{ \langle y(t) \rangle \text{deki sinüs dalgası ve dc den pikler}, \}$$

$$\begin{aligned}
& +W_1(f)\left|G_1(f)+\frac{P^2}{4}G_3(f_p,-f_p,f)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}df_1W_1(f_1)G_3(f_1,-f_1,f)+\dots\right|^2 \\
& +W_1(f-f_p)\left|\frac{p}{2}G_2(f_p,f-f_p)+\dots\right|^2+W_1(f-2f_p)\left|\frac{p^2}{8}G_3(f_p,f_p,f-2f_p)+\dots\right|^2+\dots \\
& +\{W_1(f-kf_p)|\dots|^2 \text{ de } f_p \text{ için } -f_p \text{ li terimler } ,k=1,2,\dots\} \\
& +\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}df_1W_1(f_1)W_1(f-f_1)|G_2(f_1,f-f_1)+\dots|^2 \\
& +\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}df_1W_1(f_1)W_1(f-f_1-f_p)\left|\frac{p}{2}G_3(f_1,f_p,f-f_1-f_p)+\dots\right|^2 \\
& +\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}df_1W_1(f_1)W_1(f-f_1+f_p)\left|\frac{p}{2}G_3(f_1,-f_p,f-f_1+f_p)+\dots\right|^2 \\
& +\frac{1}{3!}\int_{-\infty}^{+\infty}df_1\int_{-\infty}^{+\infty}df_2W_1(f_1)W_1(f_2)W_1(f-f_1-f_2)|G_3(f_1,f_2,f-f_1-f_2)+\dots|^2+\dots \quad (16)
\end{aligned}$$

$\langle y(t) \rangle$ için dc ve $\langle y(t) \rangle$ deki sinüs dalgalarından, $W_y(f)$ deki pikler, (15)den hesaplanabilmektedir. $A_k(f_p, P)\exp(jkpt), k = 1, 2, \dots$ bileşeni yoluyla oluşan pik, $\delta(f - kf_p)|A_k(f_p, P)|^2$ dir. $x(t)$ Gauss tipi olduğunda, P sıfır olduğunda $W_y(f)$ için (16), (14) e sadeleşir. $I_N(t)$ sıfıra özdeş olduğunda $W_y(f), y(t)$ nin sadece sinüsodal bileşenlerinden oluşan piklerden meydana gelir.

D. Rasgele Nabız Silsile Girişi.

Son olarak henüz tam manasıyla çalışılmamış olan bazı ilgilerin(konu) sonuçlarını veriyoruz. Giriş, nabız silsilesidir.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(t - nT) \quad \dots\dots\dots(17)$$

a_n ler yoğunluk olasılığı $a_n = 0$ olan bağımsız rasgele değişkenler düzenlendiğinde (distrubute) ve $y(t)$ için Volterra serileri kuadratik terimle kalır, $y(t)$ nin (ensemble) averajı (T periyodunun) periyodik kısmından oluşur.ve

$$\langle y(t) \rangle = \frac{\langle a^2 \rangle}{2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m t T} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 G_2\left(f_1, \frac{m}{T} - f_1\right) \quad \dots\dots\dots(18)$$

$y(t)$ nin güç spektrumu aşağıdadır.

$$W_y(f) = \{ \langle y(t) \rangle \text{deki den pikler} \} + \frac{\langle a^2 \rangle}{2T} |G_1(f)|^2 + \frac{[\langle a^4 \rangle - 3\langle a^2 \rangle^2]}{4T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} df_1 G_2(f_1, f - f_1) \right|^2 \\ + \frac{\langle a^2 \rangle^2}{2T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 G_2(f_1, f - f_1) \cdot G_{2^*} \left(f_1 - \frac{m}{T}, f - f_1 + \frac{m}{T} \right) \dots\dots\dots(19)$$

Burada $\langle a^m \rangle$, a_n nin m.inci momentidir. $G_2(f_1, f_2)$ bunun gibi integralleri olduğu farz edilmiştir ve toplam yakınsaktır. (*) yıldız kompleks karşılığını göstermektedir.(18) ve (19) eşitlikleri $y(t)$ için (10)daki ilk iki terim kullanılarak sağlatılabilir ve sonuçlar aşağıdadır.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT} = T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nT^{-1}), \quad \omega = 2\pi f$$

$$W_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^T dt T^{-1} \langle y(t+\tau) y^*(t) \rangle e^{-j\omega t}.$$

Eğer nabız biçimi $\delta(t)$ yerine $F(t)$ olursa giriş, (17) yerine aşağıdaki gibi olur.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n F(t - nT) \dots\dots\dots(20)$$

$\langle y(t) \rangle$ ve $W_y(f)$ tekabülü $S(f_1)G_1(f_1)$, $S(f_1)S(f_2)G_2(f_1, f_2)$ ile (18) ve (19) da $G_1(f_1)$, $G_2(f_1, f_2)$ yerine yazılmak suretiyle elde edilebilir. Burada $S(f)$,

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} F(t) dt \dots\dots\dots(21)$$

III. VOLTERRA TRANSFER FONKSİYONLARININ HESAPLANMASI

[13],[15],[16] sistemlerinde ölçümler yapılarak $g_n(u_1, \dots, u_n)$ kernelleri ve bunun Fourier dönüşümleri, Volterra transfer fonksiyonları $G_n(f_1, \dots, f_n)$ üzerinde ciddi bir çalışma yapıldı. Burada biz prensipte sistem eşitlikleri bilindiğinde ve sistem bir Volterra serisi olarak tanımlanabildiği(açılabilirdiği) (her zaman bu durum olmaz) zaman Volterra transfer fonksiyonlarının hesaplanmasıyla ilgilenmekteyiz.

Bu hesaplamaların en basitlerinden biri hafızasız durumla verilmektedir.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [x(t)]^n \frac{1}{n!} \dots\dots\dots(22)$$

$g_n(u_1, \dots, u_n)$, $a_n \delta(u_1) \dots \delta(u_n)$ ifadesine eşit olduğunda Volterra serisi sadeleşir. Burada $\delta(u)$ birim etki fonksiyonudur. a_n bir sabittir ve Volterra transfer fonksiyonunun tanımından(2),

$$G_n(f_1, \dots, f_n) = a_n. \dots\dots\dots(23)$$

Bu durum daha komplike sonuçların kontrolü için kullanışlıdır.

Bu bölüm üç kısma ayrılmıştır. Birinci bölümde n in genel değerleri için tutan ifadelerle uğraşmakta kullanışlı olan toplam notasyonlar tanımlanmaktadır. İkinci ve üçüncü bölümlerde ise “harmonik giriş” ve “direkt açılım” olarak adlandırılan G_n in hesaplanmasının iki metoduyla ilgilenilmiştir.

Harmonik giriş metodu, n in ilk birkaç değeri için $G_n(f_1, \dots, f_n)$ in hesaplanmasında kullanışlıdır ve bu bölümde örnekler için listelenen $G_1(f_1)$, $G_2(f_1, f_2)$ ve $G_3(f_1, f_2, f_3)$ için ifadeler elde etmek için kullanılabilir. n keyfi olmak üzere $G_n(f_1, \dots, f_n)$ için listelenen ifadelerin türevleri V-A ve V-B bölümlerinde kabaca verilmiş ve direkt açılım metodunun kullanımı yapılmıştır.

A. Toplam Sembolü

n in genel değerleri için G_n ile ilgili kullanılan toplam notasyonları tanımlamak için fomül örneği diye V-A bölümünde türetileni aldık.

$$G_n^{(1)}(f_1, \dots, f_n) = n! \sum_{(v;l,n)} \sum_N G_{v_1}(f_1, \dots, f_{v_1}) G_{v_2}(f_{v_1+1}, \dots, f_{v_1+v_2}) \dots G_{v_l}(f_{\mu}, \dots, f_n) \dots (24)$$

$[y(t)]^l$ için Volterra serisinde n .inci kernelin n mertebeli Fourier dönüşümü için, l bir pozitif tam sayı ve $1 \leq l \leq n$. $l \geq n$ için $G_n^{(1)}(f_1, \dots, f_n)$ sıfırdır ve $G_n^{(n)}(f_1, \dots, f_n)$ ifadesi eşittir $n! G_1(f_1) \dots G_1(f_n)$.

(24) de $\mu = v_1 + v_2 + \dots + v_{l-1} + 1 = n - v_l + 1$ ve $\sum$ in sol alt tarafındaki $(v;l,n)$, aşağıdaki gibi v_i tamsayılar kümeleri üzerindeki kısaltmaları gösterir.

$$v_1 + v_2 + \dots + v_l = n, \quad 1 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l \dots (25)$$

Başka bir ifadeyle, kısaltma l kısmı olan n in bu kısımlarından alınmıştır. (24) deki $\sum_N$ ikinci toplam, f lerin sıralaması değiştirmek suretiyle elde edilebilen, N üzerinde özdeş olmayan yapılara genişletilir. $G_n(f_1, \dots, f_n)$ simetrik ve “özdeşlik” kavramı $G_2(f_1, f_2)$ ile $G_2(f_2, f_1)$ ve $G_1(f_2)G_1(f_1)$ ile $G_1(f_1)G_1(f_2)$ özdeşir anlamında kullanılmıştır. $\sum_N$ deki terimler,

$$N = n! / v_1! v_2! \dots v_l! r_1! r_2! \dots r_k! \dots (26)$$

Burada r_1 , $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l$ düzeninde birinci uzantıdaki eşit v lerin sayısıdır. r_2 , ikinci uzantıdaki sayısıdır. vs. v ler eşit olmadığında r ler gözükmez.

Bazen ileride verilen Tablo I deki gibi toplamdaki terimleri açık yazımında yardımcı olacak kısımların bir tablosu.

$n = 2$ ve $l = 2$ olduğunda $v_1 = v_2 = 1, r_1 = 2$, $N = 2! / (1! 1! 2!)$ ve (24), aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{1}{2!}G_2^{(2)}(f_1, f_2) = G_1(f_1)G_1(f_2) \quad \dots\dots\dots(27)$$

$n = 3$ ve $l = 2$ olduğunda $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $N = 3$ ve

$$\frac{1}{2!}G_3^{(2)}(f_1, f_2, f_3) = \sum_3 G_1(f_1)G_2(f_2, f_3) = (1)(23) + (2)(13) + (3)(12) \quad \dots\dots(28)$$

$n = 4$ ve $l = 2$ olduğunda n nin iki tane 2-parça (1-parça) kısmı vardır. Bunlar ayrı ayrı $1+3=4$ ve $2+2=4$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $N = 4$ ve $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $N = 3$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}G_4^{(2)}(f_1, f_2, f_3, f_4) = & (1)(234) + (2)(134) + (3)(124) + (4)(123) \\ & + (12)(34) + (13)(24) + (14)(23). \quad \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

İfadelerdeki $G_2^{(2)}/2!$, $G_3^{(2)}/2!$, $G_4^{(2)}/2!$ için G lerin çarpanlarının numaraları ((27)-(29) da sayılarak) sırasıyla 1, 3, 7 dir. Bunlar $n = 2, 3, 4$ için ikinci tür $S(n, 2)$ in Stirling numaralarıdır. Genelde, $G_n^{(l)}(f_1, f_2, \dots, f_n)/l!$ için (24) toplamındaki çarpanların numarası $S(n, l)$ dir. Bu, hafızasız durumda (22) teklik olması için tüm a_n ler alınarak gösterilebilir ve $(e^x - 1)^l$ nin açılımsinde $x^n/n!$ nin katsayısı $l!S(n, l)$ kullanılarak gösterilebilir.

B. Harmonik Giriş Metodu

Bu metot, (1) devam ettirildiğinde, bir harmonik giriş yine bir harmonik çıkışla sonuçlanmalı gerçeğine dayanır. Böylece $x(t)$ aşağıdaki toplam olduğunda G_n (31) ile verilmektedir.

$$x(t) = \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t) + \dots + \exp(j\omega_n t) \quad \dots\dots\dots(30)$$

Burada $\omega_i = 2\pi f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve w_i ler orantısızdır.

$$G_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \{ \exp[j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t] \text{nin katsayısı} \cdot y(t) \text{nin açılımsindeki terim} \} \quad \dots\dots(31)$$

Bu sonuç (1) den takip eder. $G_1(f_1)$, $G_2(f_1, f_2)$, ... ifadelerini başarıyla hesaplamamıza imkan tanır. Böylece sistem eşitliklerinde $\exp(j\omega_1 t)$ ile $x(t)$ yi yerine yazdığımızda

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(j\omega_k t) \quad \dots\dots\dots(32)$$

$c_1 = G_1(f_1)$. Benzer şekilde $c_{11} = G_2(f_1, f_2)$. Burada,

$$x(t) = \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \exp[j(k\omega_1 + l\omega_2)t] \quad \dots\dots\dots(33)$$

$$c_{00} = 0, \quad c_{10} = G_1(f_1), \quad c_{01} = G_1(f_2)$$

ve $G_3(f_1, f_2, f_3)$, $c_{111} = G_3(f_1, f_2, f_3)$ dir, üçlü toplam,

$$\begin{aligned} c_{000} &= 0 & c_{110} &= G_2(f_1, f_2) \\ c_{100} &= G_1(f_1) & c_{010} &= G_1(f_2), \dots\dots\dots \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(34)$$

Bu metodun kullanımını izah etmek için aşağıdaki eşitlikle tanımlanan bir sistemi ele alalım.

$$y(t) = x(t) + \varepsilon [x'(t)]^2 x''(t) \quad \text{.....(35)}$$

Bu eşitlik, filtreli FM için yarı-statik yaklaşımın bazı formlarında ortaya çıkar. Burada ε bir sabit ve t ye bağlı değişimi gösterir. $x(t)$, $\exp(j\omega_1 t)$ eşitliği alınırsa $G_1(f_1) = 1$. $x(t)$, $\exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t)$ eşitliği alınırsa $G_2(f_1, f_2) = 0$. (35)de $x(t)$ ile üç üsselin katsayıları dışarı alınmış $\exp[j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t]$ toplamının eşitliği alınırsa G_3 ü verir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} G_1(f_1) &= 1 & G_2(f_1, f_2) &= 0 \\ G_3(f_1, f_2, f_3) &= 2\varepsilon\omega_1\omega_2\omega_3 (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{aligned} \quad \text{.....(36)}$$

ve $n > 3$ için $G_n = 0$. (35) ile ilişkili volterra serisinde $g_1(u_1) = \delta(u_1)$ ve g_3 , etki fonksiyonlarının türevlerinin yapılarının toplamıdır.

Metodun daha geniş bir uygulaması, aşağıdaki diferansiyel eşitlikle belirtilen sistem göz önüne alınarak izah edilebilmektedir.

$$F(d/dt)y + \sum_{l=2}^{\infty} a_l y^l = x(t) \quad \text{.....(37)}$$

Burada $x(t)$ yapıldığında $y(t)$ sıfıra özdeştir. Buradan sadece bir tek çözüm çıkar ve bu sistem kararlıdır. $F(d/dt)$, d/dt de polinom tipindedir ve $F(d/dt)$ deki katsayılar ve a_l katsayıları, t, x ve y nin bağımsız katsayılarıdır. İlk üç G_n (34) yoluyla (30)dan türetilmiş ve Bölüm V-B de türetilen tekrarlı ilişki aşağıdadır.

$$\begin{aligned} G_1(f_1) &= 1/F(j\omega_1) \\ G_2(f_1, f_2) &= -2a_2 G_1(f_1)G_1(f_2)/F(j\omega_1 + j\omega_2) \\ G_3(f_1, f_2, f_3) &= -\frac{2a_2 \sum_3 G_1(f_1)G_2(f_2, f_3) + 6a_3 G_1(f_1)G_1(f_2)G_1(f_3)}{F(j\omega_1 + j\omega_2 + j\omega_3)} \quad \text{.....(38)} \\ G_n(f_1, \dots, f_n) &= -\frac{\sum_{l=2}^{\infty} a_l G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n)}{F(j\omega_1 + \dots + j\omega_n)} \end{aligned}$$

Son eşitlik bir tekrardır çünkü $G_n^{(l)}$, (24) ile verilmiştir ve ($2 \leq l \leq n$ için) (24)ün sağ tarafı (l ye bağlı olarak) $G_1(f_1), G_2(f_1, f_2), \dots, G_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})$ lerin bir kısmının veya hepsinin bir kombinasyonudur.

Bu sonuçların kullanımının bir örneği olarak, doğrusal olmayan zayıf bir dirençle, seride bağlı bir birim indüktans için uygulanan voltaj giriş $x(t)$ olsun. $y(t)$ çıkışı devre üzerindeki akımı ve aşağıdaki Riccati eşitliğinin çözümüdür.

$$\frac{dy'}{dt} + xy + \varepsilon y^2 = x(t) \quad \text{.....(39)}$$

$x(t)$ girdiğinde eşitlik sıfıra yönelir. Böyle bir çözümün varlığı ve kararlılığı, fiziksel temeller üzerinde beklemek, devrenin operasyonu süresince hemen hiç negatif olmayan $\alpha + \varepsilon y$ direnci gibi α ve ε sağlamaktadır. ε yi çok küçük kabul ediyoruz böylece ε ile karşılaştırdığımızda εy her zaman daha küçüktür.

(37) nin (39) da uygulanmasında, $(d/dt) + \alpha$, $a_2 = \varepsilon$ olarak $F(d/dt)$ alıyoruz ve $w_i = 2\pi f_i$ ile (38) den elde ediyoruz.

$$\begin{aligned} G_1(f_1) &= (\alpha + j\omega_1)^{-1} \\ G_2(f_1, f_2) &= \frac{(-2\varepsilon)[\alpha + j(\omega_1 + \omega_2)]^{-1}}{(\alpha + j\omega_1)(\alpha + j\omega_2)} \\ G_3(f_1, f_2, f_3) &= \frac{(-2\varepsilon)^2 [\alpha + j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)]^{-1}}{(\alpha + j\omega_1)(\alpha + j\omega_2)(\alpha + j\omega_3)} \cdot \sum_3 \frac{1}{\alpha + j\omega_2 + j\omega_3} \\ G_n(f_1, f_2, \dots, f_n) &= -\varepsilon [\alpha + j(\omega_1 + \dots + \omega_n)]^{-1} G_n^{(2)}(f_1, \dots, f_n) \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

Burada $G_n^{(2)}$ (24) de verilmiştir. G_3 de

$$\sum_3 \frac{1}{\alpha + j\omega_2 + j\omega_3} = \frac{1}{\alpha + j\omega_2 + j\omega_3} + \frac{1}{\alpha + j\omega_1 + j\omega_3} + \frac{1}{\alpha + j\omega_1 + j\omega_2} \dots \dots \dots (41)$$

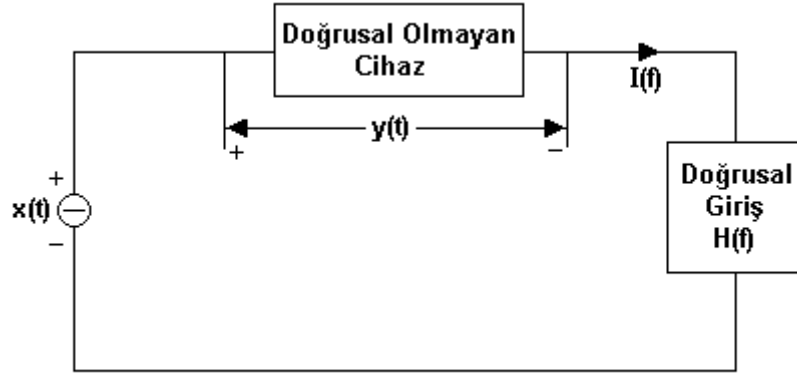
(37) deki doğrusal olmayan diferansiyel eşitlik sistemine biraz benzeyen, şekil-3 te gösterilen doğrusal olmayan aygıt üzerinden geçen $y(t)$ voltajı için G_n ile ilgili, harmonik giriş metodunun başka bir uygulamasıdır. $x(t)$ voltajı, aşağıda (42) ile tanımlanan doğrusal olmayan aygıtın kombinasyon serisine ve $H(f)$ doğrusal girişine uygulanmıştır.

$$l(t) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t [y(t)]^t \dots \dots \dots (42)$$

Deutsch un[12],[17] çalışmalarında izah ettiği gibi $y(t)$ için serinin bir bilgisi, bazı doğrusal olmayan problemlerin çözümü için anahtardır. $y(t)$ için Volterra transfer fonksiyonları aşağıdadır.

$$\begin{aligned} G_1(f_1) &= H(f_1) / [a_1 + H(f_1)] \\ G_2(f_1, f_2) &= -2a_2 G_1(f_1) G_1(f_2) / [a_1 + H(f_1 + f_2)] \\ &\vdots \\ G_n(f_1, \dots, f_n) &= - \frac{\sum_{l=2}^n a_l G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n)}{a_1 + H(f_1 + \dots + f_n)} \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

Burada son eşitlik Bölüm V-B den türetilmiştir. $n > 1$ için bu eşitliğin (38)den tek farkı $F(jw_1 + \dots + jw_n)$ yerine paydasında $a_1 + H(f_1 + \dots + f_n)$ bulunmasıdır. onlar aslında Deutsch [12],[17]e uygun olan $G_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ için tekrarlı ilişkilerin kümesini veriyorlar. Bizim $G_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$, Dutsch un $Q_n(w_1, \dots, w_n)$ fonksiyonlarının, $n!$ kere simetrize edilmiş versiyonudur. ($w_i = 2\pi f_i$). Şekil-3 teki devre için $K(w_1)$ çok evreli cereyanı (katsayısı) Deutsch nin $Q_1(w_1)$ inde teklikle görünür.



Şekil-3. Doğrusal Girişli Seride Doğrusal Olmayan Cihaz

Bu uygulamanın bir örneği olarak, seride $I(t)=a_2[y(t)]^2$ ikinci derece cihazla doğrusal bir L indüktansı göz önüne alıyoruz. Devre eşitliği aşağıdadır(44).

$$\beta \frac{d}{dy} y^2 + y = x(t), \quad \beta = La_2. \quad \dots\dots\dots(44)$$

Bu, seride seride doğrusal olmayan dirençle bir indüktans için (39) daki Riccati eşitliğinden biraz farklıdır. İndüktans için giriş(kabul) fonksiyonu $H(f) = 1j\omega L$ dir ve sadece sıfır olmayan a_1 katsayısı a_2 dir.(43) te yerine koymalar, aşağıdaki argümanların atlanması üzerinedir.

$$\begin{aligned} G_1 &= 1 \\ G_2 &= -2a_2j(\omega_1 + \omega_2)L = -2j\beta(\omega_1 + \omega_2) \\ G_3 &= 2(-2j\beta)^2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 \quad \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

Burada ifade, G_3 için tekrarlı ilişkiden ve $G_3^{(2)}$ için de (28) den elde edilmektedir.

$$G_n = -j\beta(\omega_1 + \dots + \omega_n)G_n^{(2)}(f_1, \dots, f_n)$$

G_4 ün $\omega_1, \dots, \omega_4$ de üçüncü derece simetrik bir çok terimli (polinom) olmasına rağmen $G_4^{(2)}$ için (29) un kullanımı gösteriyor ki G_4 sanıldığı kadar kolay olmayabilir.

C. Direkt Açılım Metodu.

Sistemi deneme”probing” için başka bir alternatif, harmonik giriş metodunda olduğu gibi, bir Volterra serisi açılımının (1)deki haline getirene kadar sistem eşitliklerini tanımlamadır. (2) k Volterra kernellerinin n.inci Fourier dönüşümleri alınarak, Volterra transfer fonksiyonları bulunabilmektedir. Bu, hafızasız durumda(22) kullanılan alışılmış tekniktir. Direkt açılım metodunun başlıca değeri, Bölüm V-B deki gibi, n in genel değerleri için alınan ifadelerin türetilmesindedir. n küçük olduğunda harmonik giriş metodunun kullanımı daha basit görünmektedir.

Direkt genişleme metodu ile analiz edilebilen doğrusal olmayan bir sistem örneği Şekil-1 de gösterilen modülatör-filtre-demodülatör sistemidir.

Sistem çıkışı (46) ile verilen,

$$y(t) = F \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) h[x(t-u)] du \right\}. \quad \dots\dots\dots(46)$$

Modülatör ve demodülatör fonksiyonları güç serilerine açılabilirler.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{v=0}^{\infty} h_v x^v / v! & F(z) &= \sum_{l=1}^{\infty} F_l (z - z_0)^l / l! \\ z_0 &= h_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du & F(z_0) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(47)$$

ve filtrenin $g(t)$ etki(tesir) tepki si filtre transfer fonksiyonu $G(f)$ ile ilişkilidir.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} g(t) dt. \quad \dots\dots\dots(48)$$

Kısım	1	N	$G_4(f_1, f_2, f_3, f_4)$ deki terimler
4	1	1	$F_1 h_4 G(f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$
1+3	2	4	$F_2 h_1 h_3 \sum_4' G(f_1) G(f_2 + f_3 + f_4)$
2+2	2	3	$F_2 h_2^2 \sum_3' G(f_1 + f_2) G(f_3 + f_4)$
1+1+2	3	6	$F_3 h_1^2 h_2 \sum_6' G(f_1) G(f_2) G(f_3 + f_4)$
1+1+1+1	4	1	$F_4 h_1^4 h_2 G(f_1) G(f_2) G(f_3) G(f_4)$

Tablo-1

(46)dan elde edilen Volterra transfer fonksiyonları ve $y(t)$ için Volterra serilerindeki kernellerin Fourier dönüşümleri aşağıdadır.

$$G_1(f_1) = F_1 h_1 G(f_1)$$

$$G_2(f_1, f_2) = F_1 h_2 G(f_1 + f_2) + F_2 h_1^2 G(f_1) G(f_2)$$

$$G_3(f_1, f_2, f_3) = F_1 h_3 G(f_1 + f_2 + f_3) + F_2 h_1 h_2 G(f_1) G(f_2) \sum_3' G(f_1) G(f_2 + f_3) + F_3 h_1^3 G(f_1) G(f_2) G(f_3)$$

$$G_n(f_1, \dots, f_n) = \sum_{l=1}^n F_l \sum_{(v,l,n)} h_{v_1} \dots h_{v_l} \sum_N' G(f_1 + f_2 + \dots + f_{v_l}) + F_3 h_1^3 G(f_1) G(f_2) G(f_3). \quad \dots\dots\dots(49)$$

Son eşitlik Bölüm V-B de türetilmiştir. Burada $\sum_3'$, (28) de gösterilen tipin bir toplamıdır. ve $\sum_{(v,l,n)}$ ve $\sum_N'$ toplamlar, (24)-(29) arasındaki bağlantıda tanımlanmıştır.

$$\sum_{l=1}^n \sum_{(v,l,n)} = \sum_{\pi(n)} \quad \dots\dots\dots(50)$$

Burada $\sum$ toplamının altındaki $\pi(n)$, n nin tüm kısımlarının toplamını göstermektedir. Kısımdaki bölümler l ve v ler de bölümlerdir. Bölümler (25) ile ilgilidir. G_n için (49) genel formu iki türlü yazılabilmektedir. 1) [18, pp. 831-832] de verilen kısımların tablosundan. Burada N nin değerleri M_3 ile etiketli kolonda listelenmiştir. 2) [19, p.125] de verilen Bell polinomlarının tablosu. Tablo-1, $n = 4$ için prosedür izah ediyor. G_4 ün değeri son kolondaki terimlerin toplamı ile verilmiştir.

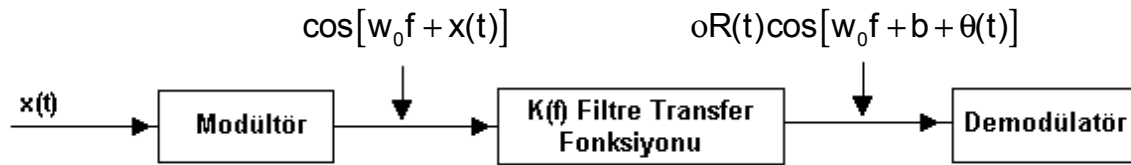
$G_1(f_1)$ için $B_1 = 1$ [bak(49)], $G_2(f_1, f_2)$ için B_2 , $G_3(f_1, f_2, f_3)$ için $B_3 = 1 + 3 + 1 = 5$ ve (BakTablo-1) G_4 için $B_4 = 1 + 4 + 3 + 6 + 1 = 15$ şeklinde hesaplandığında $B_n, G_n(f_1, \dots, f_n)$ deki farklı yapıların numarası olsun. $G(f) \equiv 1$ olduğunda, $g(u), \delta(u)$ dir, $y(t), F\{h[x(t)]\}$ dir, sistem hafızasızdır ve $y(t)$ nin açılımında $[x(t)]^n / n!$ nin katsayısı G_n dir. (47) den $h_v = 1$ ve $F_1 = 1$ ayarlaması $y = \exp[e^x - 1] - 1$ i verir ve (49) dan $G_n = B_n$ dir. Buradan, $\exp[e^x - 1]$ in açılımında $x^n / n!$ in katsayısı B_n dir ve bundan B_n için tekrarlı bir ilişki elde edilebilmektedir. B_n , n ile birlikte artar. Örneğin, $B_5 = 52$ ve $B_6 = 203$. B_n ler Bell numaralarıdır [19, p.192].

modülatör-filtre-demodülatör sisteminin özel bir hali, şekil-4 te gösterilen modülasyon-evre(faz)(phase) sistemiyle verilmiş ve sonraki bölümde göz önüne alınmıştır. Kısaca, $x(t)$ girişi, $K(f)$ transfer fonksiyonuna sahip bir filtre üzerinden geçen taşıyıcı bir dalgayı modüle faz kullanılmaktadır. $\theta(t)$ çıkışı, filtre çıkışının faz açısının parça değişkeni olarak alınmaktadır. Şekil-1 sistemi için $h(x) = \exp(jx)$ ile bu, $F(z) = \ln z$ ve $z_0 = 1$ ye tekabül eder. Sonra,

$$h_v = j^v \quad F_l = (-1)^{l-1} (l-1)! \quad \dots\dots\dots(51)$$

ve Bölüm IV-C de gösterildiği gibi (49) da yerine yazma $\theta(t)$ için Volterra transfer fonksiyonlarına götürür. $n = 1$ ve $n = 2$ için bunlar,

$$G_{\theta 1}(f_1) = \frac{1}{2} [\Gamma(f_1) + \Gamma^*(-f_1)]$$



Şekil-4. Faz-Modülasyon Sistemi

$$G_{\theta 2}(f_1, f_2) = \frac{j}{2} [\Gamma(f_1 + f_2) - \Gamma(f_1)\Gamma(f_2) - \Gamma^*(-f_1 - f_2) + \Gamma^*(-f_1)\Gamma^*(-f_2)] \quad \dots\dots\dots(52)$$

burada yıldız, kompleks karşılığı göstermekte ve $\Gamma(f) = K(f_0 + f) / K(f_0)$, f_0 , taşıyıcı frekans $w_0 / (2\pi)$. $\Gamma(f) = \exp(-jbf^2)$ ile $G_{\theta 2}(f_1, f_2)$ için (52) ifadesi, bir FM dalgasının iyonküresine doğru ilerlemesiyle ortaya çıkan tahrifat çalışmasında kullanılmıştır. Burada verilen $G_{\theta n}(f_1, \dots, f_n)$ genel terimin yapısı, FM tahrifatları çalışmasında Mircea[7] tarafından tanıtılan intermodülasyon yapısına çok benzemektedir.

Volterra transfer fonksiyonunu düzenlemek için direkt açılım metodunun kullanımının diğer bir genel örneği de Şekil-2 de gösterilen feedback sistemidir.

Sistem girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ dir. $x(t)$ ve $y(t)$ ile ilgili sistem eşitlikleri:

$$y(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du'_l m_l(u'_1, \dots, u'_l) \prod_{q=1}^l w(t-u'_q) \quad \dots\dots\dots(53)$$

$$w(t) = x(t) - z(t) \quad \dots\dots\dots(54)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(v)y(t-v)dv \quad \dots\dots\dots(55)$$

Burada $B(f)$ filtre dönüşüm fonksiyonu [$b(v)$ nin Fourier dönüşümü] ve $m_n(u_1, \dots, u_n)$ Volterra kernellerinin $M_n(f_1, \dots, f_n)$ n-katlı simetrik Fourier dönüşümlerinin bulunduğu kabul edilmektedir.

Problem, $G_n(f_1, \dots, f_n)$ Volterra transfer fonksiyonunu düzenlemedir. i.e. $y(t)$ için (1) serisinde n.inci kernelin n-katlı Fourier dönüşümü. $n = 1, 2, 3$ için cevap, harmonik giriş metoduyla elde edilebilir ve aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} G_1(f_1) &= [1 + M_1(f_1)B(f_1)]^{-1} M_1(f_1) \\ G_2(f_1, f_2) &= [1 + M_1(f_1 + f_2)B(f_1 + f_2)]^{-1} K_1(f_1)K_1(f_2)M_2(f_1, f_2) \quad \dots\dots\dots(56) \\ G_3(f_1, f_2, f_3) &= [1 + M_1(f_1 + f_2 + f_3)B(f_1 + f_2 + f_3)]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} [K_1(f_1)K_2(f_2, f_3)M_2(f_1, f_2 + f_3) \\ + K_1(f_2)K_2(f_3, f_1)M_2(f_2, f_3 + f_1) \\ + K_1(f_3)K_2(f_1, f_2)M_2(f_3, f_1 + f_2)] \\ + K_1(f_1)K_1(f_2)K_1(f_3)M_3(f_1, f_2, f_3) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

burada,

$$\begin{aligned} K_1(f_1) &= 1 - B(f_1)G_1(f_1) \\ K_n(f_1, \dots, f_n) &= -B(f_1 + \dots + f_n)G_n(f_1, \dots, f_n), \quad n > 1 \quad \dots\dots\dots(57) \end{aligned}$$

$G_2(f_1, f_2)$ için ifade, $K_1(f_1)$ yoluyla $G_1(f_1)$ e göre değişir ve $G_3(f_1, f_2, f_3)$ için ifade, $K_1(f_1)$ ve $K_2(f_1, f_2)$ yoluyla $G_1(f_1)$ ve $G_2(f_2, f_1)$ e göre değişir. Bunda dolayı (56) nın ikinci ve üçüncüsü tekrarlı ilişkilerdir.

(56)daki üç ifade, Narayanan[6] tarafından verilen üçlüye eşittir. Narayanan'ın kullandığı $\mu_n(f_1, \dots, f_n)$, $G_n(f_1, \dots, f_n)$ ve $\beta(f)$ ifadeleri bizim gösterimimizde $M_n(f_1, \dots, f_n)/n!$, $G_n(f_1, \dots, f_n)/n!$, $B(f)$ dir.

Direkt açılım metoduyla Bölüm V-B de elde edilen $n > 1$ için n.inci tekrarlı ilişki,

$$G_n(f_1, \dots, f_n) = [1 + M_1(f_1 + \dots + f_n)B(f_1 + \dots + f_n)]^{-1} \cdot \sum_{l=2}^n \sum_{(v;l,n)} \sum_N K_{v_1}(f_1, \dots, f_{v_1}) K_{v_2}(f_{v_1+1}, \dots, f_{v_1+v_2}) \dots K_{v_l}(f_{\mu}, \dots, f_n) M_l(f_1 + \dots + f_{v_1}, f_{v_1+1} + \dots + f_{v_1+v_2}, \dots, f_{\mu} + \dots + f_n) \quad (58)$$

burada N tamsayı ve v_i tamsayılarının $(v;l,n)$ kümeleri üzerindeki toplam (24)deki gibidir.

$$w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_i k_i(u_1, \dots, u_i) \prod_{r=1}^i w(t - u_r) \quad (59)$$

K_n , (59)daki kernellerin n-katlı Fourier dönüşümüdür. $z(t)$ için bir seri elde etmek için bu, (55)de $y(t)$ için (1) serisinde yerine konmasıyla elde edilebilmektedir ve sonra (54)de $z(t)$ için bu seri yerine konur $w(t) = x(t) - z(t)$.

IV. AÇIKLAYICI ÖRNEKLER

Girişlerin bir değişimi için doğrusal olmayan cihazların çıkış özellikleri Bölüm II de verilmekte, formüllerin listelerinin çeşitliliği ,bunları pratik örneklerle uygulayarak kullanımlarını izah etmeyi gerektirmiştir.Bu bölümde, Volterra transfer fonksiyonlarının hesaplanmasını açıklamak, buna ilaveten spesifik giriş sinyalleri için çıkış özelliklerini elde etmek için BölümIII de kullanılan örneklerin bazıları konu edilecek.

A. Yarı-Statik Filtreli FM

BölümIII-B den, bu durum için sistem eşitliği ve Volterra transfer fonksiyonları;

$$y(t) = x(t) + \varepsilon [x'(t)]^2 x''(t) \\ G_1(f_1) = 1 \quad G_3(f_1, f_2, f_3) = 2\varepsilon w_1 w_2 w_3 (w_1 + w_2 + w_3) \quad (60)$$

burada, $w = 2\pi f$ ve değişmeyen tüm G_n ler sıfırdır. $x(t)$ Gauss tipinde olduğu zaman (11) gösterir ki $\langle y(t) \rangle$ sıfırdır.(14) ten, $y(t)$ için güç spektrumundaki öncü terimler;

$$W_y(f) = W_x(f) \left| 1 - \varepsilon (2\pi f)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) (2\pi f_1) \right|^2 + \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) W_x(f - f_1 - f_2) \cdot |2\varepsilon f_1 f_2 (f - f_1 - f_2) f (2\pi)^4|^2 \quad (61)$$

Bu aynı zamanda $W_y(f)$ için kesin ifadedir çünkü $W_y(f)$ için tüm ifadenin(160) bir denemesi(inceleme) gösterir ki bu durum için tüm değişmeyen terimler sıfırdır. $x(t)$ nin güç spektrumu ile bunun $x'(t)$ zaman türevi arasında $W_{x'}(f) = (2\pi f)^2 W_x(f) = w^2 W_x(f)$ ilişkisini kullandığımızda (61) ifadesi aşağıdaki hale gelir.

$$W_y(f) = W_x(f) \left| 1 - \varepsilon w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_{x'}(f_1) \right|^2 + \frac{4\varepsilon^2 w^2}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_{x'}(f_1) W_{x'}(f_2) W_{x'}(f - f_1 - f_2) \dots (62)$$

(60)da $I_n(t)$ Gauss tipi olmak üzere $x(t) = P \cos pt + I_n(t)$ olduğunda (15) ve (16) gösterir ki $y(t)$ nin periyodik kısmı ensemble averajdır.

$$\langle y(t) \rangle = P \left\{ 1 - \frac{1}{4} P^2 \varepsilon p^4 - \varepsilon p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_r(f_1) \right\} \cos pt + \frac{1}{4} P^3 \varepsilon p^4 \cos 3pt \dots (63)$$

ve $y(t)$ nin güç spektrumu vardır.

$$\begin{aligned} W_y(f) = & \{ \langle y(t) \rangle \text{ nin } \exp(\pm jpt) \text{ ve } \exp(\pm j3pt) \text{ bileşenleri ile dört pik} \} \\ & + W_r(f) \left| 1 - \frac{1}{2} P^2 \varepsilon p^2 w^2 - \varepsilon w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_r(f_1) \right|^2 + \frac{1}{16} P^4 \varepsilon^2 p^4 w^2 [W_r(f - 2f_p) + W_r(f + 2f_p)] \\ & + \frac{1}{2} P^2 \varepsilon^2 p^2 w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_r(f_1) [W_r(f - f_1 - f_p) + W_r(f - f_1 + f_p)] \\ & + \frac{4\varepsilon^2 w^2}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_r(f_1) W_r(f_2) W_r(f - f_1 - f_2) \dots (64) \end{aligned}$$

Burada $2\pi f_p = p$ dir. P sıfır olduğunda $x(t)$ yalnız Gauss gürültüsünden oluşuyorsa (64) ifadesi (62) ye sadeleşir.

B. Seri endüktans ve Doğrusal Olmayan Direnç

Kabul edelim ki Bölüm III-B de [(39)] tanımlanan birim indüktans ve doğrusal olmayan $(\alpha + \varepsilon y)$ direncin serilerine, $x(t) = P \cos pt + Q \cos qt$ voltajı uygulansın. ε küçük olduğunda $y(t)$ akımının $(p - q)$ bileşenindeki öncü terim nedir? $\pm(p - q)$ terimlerini elde etmek için $(p + q)$ terimi için (5) de p ve q ların işaret değişimi ve (40) dan $G_2(f_1, f_2)$ yerine (vekil) koyma gösteriyor ki $(\alpha$ ve ε reel farz ediliyor) istenen öncü terim aşağıdakidir (65).

$$2\text{Re} \left[e^{j(p-q)t} \frac{PQ(-2\varepsilon)[\alpha + j(p-q)]^{-1}}{4(\alpha + jp)(\alpha - jq)} \right] \dots (65)$$

$x(t)$ voltajı seri kombinasyonuna uygulandığında Gauss tipidir, (14) ten, $y(t)$ akımının güç spektrumundaki öncü terimler aşağıdadır.

$$W_y(f) = \langle y(t) \rangle^2 \delta(f) + W_x(f) \left| G_1(f) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) G_3(f, f_1, -f_1) \right|^2$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) W_x(f - f_1) |G_2(f_1, f - f_1)|^2 + \theta(\varepsilon^4) \quad \dots\dots\dots(66)$$

Burada (40) ve (11) den,

$$G_1(f) = (\alpha + jw)^{-1} \quad w = 2\pi f$$

$$|G_2(f_1, f - f_1)|^2 = \frac{4\varepsilon^2(\alpha^2 + w^2)^{-1}}{(\alpha^2 + w_1^2)[\alpha^2 + (w - w_1)^2]}$$

$$\langle y(t) \rangle = -\varepsilon \alpha^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) (\alpha^2 + w_1^2) \quad \dots\dots\dots(67)$$

ve (40) dan $G_3(f, f_1, -f_1) = \theta(\varepsilon^2)$ dir. ε küçük ve $x(t)$ Gauss tipinde olduğunda $y(t)$ nin $p(y)$ yoğunluk olasılığı tam olmasa da normale yakındır. Bölüm VIII-B de üzerinde durulduğu gibi $p(y)$ nin normalden sapması, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ kumulantlarının değerlerinden tahmin edilebilir. Bununla beraber (40) dan, G_n ler kullanıldığında (13) integraller, κ_3, κ_4 için oldukça karmaşıktır ve burada değerlendirmeyi bitiremeyiz. Bir filtrenin takip ettiği karesel bir aygıt üzerinde gürültü ile bağlantılı, daha az karmaşık bir örnek, Bölüm IV-D de verilmektedir.

C. Filtre Edilmiş Faz Modülasyonu

Bu örnekte, Şekil-1 deki modülatör-filtre-demodülatör sisteminin özel bir durumu olan Şekil-4 gösterilen faz-modülasyon sistemini göz önüne alarak, $G_n(f_1, \dots, f_n)$ için (49) un kullanımını izah ediyoruz. Bu sistemde filtre istek dışı tahrifatlar (bükülme) meydana getirir. $x(t)$ giriş, $\theta(t)$ çıkış ve $K(f)$ de filtre transfer fonksiyonudur. $x(t)$ sıfır olduğunda filtre çıkışı bir $\cos(w_0 t + b)$ dir. Burada $[w_0 = 2\pi f_0]$ olmak üzere, $K(f_0) = K_0^*(-f_0) = a \exp(jb)$, filtre çıkışındaki $R(t)$ örten faktör tektir (birim) ve $\theta(t)$ sıfırdır. Faz-modülasyon teoreminden [8]-[10]

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \text{Im } y(t) \\ y(t) &= \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} du \gamma(u) e^{j\omega(t-u)} \right] \\ \gamma(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} df e^{j\omega u} \Gamma(f), \quad w = 2\pi f \\ \Gamma(f) &= K(f_0 + f) / K(f_0) \quad \dots\dots\dots(68) \end{aligned}$$

Bu örnekte sistem çıkışı $y(t)$ yerine $\theta(t)$ dir. Burada $y(t) = \ln R(t) + j\theta(t)$ dir. Filtre bulunmadığı zaman, $K(f)$, f frekansının bağımsızdır, $\Gamma(f) = 1$, $\gamma(u) = \delta(u)$, $y(t) = jx(t)$ ve $\theta(t), x(t)$ ye eşittir. Biz, filtre bulunduğu zaman, $\theta(t)$ ve $x(t)$ arasındaki genelde küçük olan farklılıkla ilgilenmekteyiz.

$\theta(t)$ ye Bölüm II de listelenen formülleri uygulamak için, $\theta(t)$ için Volterra serisindeki kernellerin $G_{\theta n}(f_1, \dots, f_n)$ Fourier dönüşümlerine ihtiyacımız var. $y(t)$ için Volterra serisini reel ve sanal kısımlarına ayırarak ve $\theta(t) = \text{Im} y(t)$ ifadesini kullanarak, aşağıdaki (69) ifade gösterilebilir.

$$G_{\theta n}(f_1, \dots, f_n) = [G_n(f_1, \dots, f_n) - G_n^*(-f_1, \dots, -f_n)] / (2j) \quad \dots\dots\dots (69)$$

Burada $G_n(f_1, \dots, f_n)$, $y(t)$ için n.inci kernelin Fourier dönüşümüdür. Hakikaten şu genel sonuca sahibiz ki $x(t)$ reel olduğunda, $y(t)$ nin reel ve sanal kısımları $y_R(t)$ ve $y_I(t)$ için serideki kernellerin Fourier dönüşümleri aşağıda (70) dır.

$$\begin{aligned} y_R(t) \text{ için } & [G_n(f_1, \dots, f_n) + G_n^*(-f_1, \dots, -f_n)] / (2) \\ y_I(t) \text{ için } & [G_n(f_1, \dots, f_n) - G_n^*(-f_1, \dots, -f_n)] / (2j) \quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

(68) ve (49) un $y(t)$ için karşılaştırması gösterir ki $g(u) = \gamma(u)$, $h(x) = \exp(jx)$ ve $F(z) = \ln z$. Buradan, $G(f)$, $\Gamma(f)$ ye gider, $h(x)$ in açılımındaki katsayılar $h_v = j^v$ ve $z_0 = 1$ belirten eşitlik de $z_0 = h_0 \Gamma(0) = 1$ olur. $z = z_0 = 1$ de $F(z)$ açılımı, $F_1(-1)^{l-1} (l-1)!$ ifadesini verir. Genel eşitlikler (49) gösteriyor ki faz-modülasyon (68) eşitlikleriyle tanımlanmış $y(t)$ için Volterra serisindeki kernellerin Fourier dönüşümleri aşağıdaki (71) dir.

$$G_1(f_1) = j \Gamma(f_1)$$

$$G_2(f_1, f_2) = j^2 [\Gamma(f_1 + f_2) - \Gamma(f_1) \Gamma(f_2)]$$

$$G_3(f_1, f_2, f_3) = j^3 [\Gamma(f_1 + f_2 + f_3) - \Gamma(f_1) \Gamma(f_2 + f_3) - \Gamma(f_2) \Gamma(f_1 + f_3) - \Gamma(f_3) \Gamma(f_1 + f_2) + \Gamma(f_1) \Gamma(f_2) \Gamma(f_3)]$$

$$G_n(f_1, \dots, f_n) = j^n \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} (l-1)! \sum_{(v;l,n)} \sum_N \Gamma(f_1 + \dots + f_{v_1}) \Gamma(f_{v_1+1} + \dots + f_{v_1+v_2}) \dots \Gamma(f_{\mu} + \dots + f_n) \quad (71)$$

$G_{\theta n}$ için (69)daki genel ilişkide (71) in yerine konulmasıyla elde edilen $G_{\theta 1}$ ve $G_{\theta 2}$ ifadeleri (52) de gösterildiği gibi aşağıdadır (72).

$$G_{\theta 1}(f_1) = \frac{j}{2j} [\Gamma(f_1) + \Gamma^*(-f_1)]$$

$$G_{\theta 2}(f_1, f_2) = \frac{j^2}{2j} [\Gamma(f_1 + f_2) - \Gamma(f_1) \Gamma(f_2) - \Gamma^*(-f_1 - f_2) + \Gamma^*(-f_1) \Gamma^*(-f_2)] \quad \dots\dots\dots (72)$$

$\Gamma^*(-f)$, $\Gamma(f)$ ye eşit olduğunda f_0 taşıyıcı frekansın her yerinde $K(f)$ filtre transfer fonksiyonu “simetrik” olduğunda, eğer n çift ise $G_{\theta n}$ sıfır ve eğer n tek ise $G_{\theta n}$, $-jG_n$ ye eşittir.

Artık $G_{\theta n}$ bilinmekte, farklı $x(t)$ girişleri için Bölüm II de listelenen formüllerde $y(t)$ yerine $\theta(t)$ ve $G_n(f_1, \dots, f_n)$ yerine $G_{\theta n}(f_1, \dots, f_n)$ yerleştirilerek $\theta(t)$ hakkında bilgi elde

edilebilmektedir. Örneğin $x(t) = P \cos pt + Q \cos qt$ olduğunda $\theta(t)$ deki $\exp[j(p-q)t]$ bileşeni [(5)deki $\exp[j(p-q)t]$ teriminde q ve f_q nun işaretlerini değiştirmek suretiyle] aşağıdaki öncü terime sahiptir.

$$e^{j(p-q)t} \frac{PQ}{4} G_{\theta 2}(f_p, -f_q) = e^{j(p-q)^2} \frac{PQ}{8} j \left[\Gamma(f_p - f_q) - \Gamma(f_p) \Gamma(-f_q) - \Gamma^*(-f_p + f_q) + \Gamma^*(-f_p) \Gamma^*(f_q) \right] \quad (73)$$

Mircea[20] $x(t) = P \cos pt$ olduğundaki durumu göz önüne aldı ve $x(t)$ Gauss tipinde olduğunda (bak [8]-[11]) $W_\theta(f)$ güç spektrumu için [7] de verilen serideki genel terimin yapısını elde etti. Mircea-Sinnreich (14) serisinde yerine koyma koşuluyla, $W_\theta(f)$ deki doğrusal ve ikinci seviye modülasyon terimlerinin toplamındaki öncü terimler,

$$W_x(f) |G_{\theta 1}(f)|^2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) W_x(f - f_1) |G_{\theta 2}(f_1, f - f_1)|^2 \quad \dots\dots\dots(74)$$

Burada $G_{\theta 1}$ ve $G_{\theta 2}$ (72) de verilmiştir.

Volterra serileri yaklaşımının kullanışlı olduğu bölüm, $x(t) = P \cos pt$ durumu göz önüne alınarak elde edilebilmektedir. Bizim notasyonumuzda bu durum için $\theta(t)$ nin alışımlı ifadesi,

$$\theta(t) = \arctan \left[\frac{\text{Im} S}{\text{Re} S} \right]$$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n J_n(P) \Gamma(n f_p) e^{jnpt} \quad \dots\dots\dots(75)$$

Burada $J_n(P)$, n seviyesinin Bessel fonksiyonudur. $\Gamma(f) \equiv 1$ olduğunda, $S = \exp(jP \cos pt)$ ve $\theta(t)$, $x(t)$ girişine eşittir. Filtre bandı geniş olduğunda S , $\exp(jP \cos pt)$ olarak kalır. $\theta(t)$ nin her değeri için P , $|S-1| < 1$ olacak şekilde küçük olduğunda, aşağıdaki ifade kullanılarak $\theta(t)$, P de yakınsak bir güç serisine açılabilir.

$$\theta(t) = \text{Im} \ln[1 + (S-1)] \quad \dots\dots\dots(76)$$

Diğer taraftan (3) tüm seri gösterir ki

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\exp[j(2k-n)pt]}{k!(n-k)!} G_{\theta(k,n-k)}(f_p) \quad \dots\dots\dots(77)$$

burada, G nin $\theta(k, n-k)$ indisi gösterir ki f_i nin ilk k sı ile $G_{\theta n}(f_1, \dots, f_n)$, f_p ye eşittir ve kalan $n-k$ da $-f_p$ ye eşittir. Bundan dolayı (77), P nin gücünde $\arctan[\text{Im} S / \text{Re} S]$ nin güç serisi açılımını verir. Bir FM sisteminde P “sapma oranı” dır. Bu gösterir ki FM sistemine Volterra serisi analizi uygulandığında sistemler için küçük sapma oranları kullanmak çok daha kullanışlıdır. bir çok mikrodalga radyo düzenleyici sistemlerde.

D.Filtreli Kare-law Dedektör

Bir filtrenin takip ettiği kare-law bir aygıt için sistem eşitliği aşağıdadır.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(u)x^2(t-u)du \quad \dots\dots\dots(78)$$

burada $x(t)$ kare-law aygıt için giriş ve $y(t)$ çıkış filtresidir. $W_x(f) = (2\pi)\exp(-f^2/2)$ güç spektrumlu $x(t)$ Gauss gürültüsü girişi olduğunda, $y(t)$ nin $p(y)$ yoğunluk olasılığıyla ilgileniyoruz ve filtre etki tepkisi $b(u)$ ve bunun Fourier dönüşümü $B(f)$ aşağıdadır.

$$b(u) = \beta(2\pi)^{1/2} \exp(-2\pi^2\beta^2u^2)$$

$$B(f) = \exp[-f^2/(2\beta)^2] \quad \dots\dots\dots(79)$$

Filtrenin etkili geçiş bandı, $-\beta$ dan $+\beta$ ya ve gürültünün etkili bandı -1 den $+1$ e kadar kapsama alanına alır. Bu durum, Slepian [21] tarafından incelenen, $|u| < T/2$ için $b(u) = 1$ ve $|u| > T/2$ için $b(u) = 0$, $x(t)$ RLC Gauss gürültüsü, durumundan daha basit bir durumdur.

Öncelikle bazı genel fikirler. (78) in her iki tarafının ortalamasını çıkarıp $\langle x^2(t) \rangle = 1$ i kullanmak gösteriyor ki band genişliği ne olursa olsun $\langle y(t) \rangle = B(0) = 1$. $b(u) \geq 0$ olduğundan beri $y < 0$ iken $p(y)$ sıfırdır. $\beta = \infty$ olduğunda filtre etkisizdir, $y(t) = x^2(t)$ ve $y > 0$ için

$$p(y) = (2\pi y)^{-1/2} \exp(-y/2) \text{ dir.} \quad \dots\dots\dots(80)$$

$\beta \rightarrow 0$ iken bant genişliği sıfıra yaklaşır ve $y = 1$ ortalama değerinde merkezileştirilmiş genişlik sıfıra yaklaşmanın normal kuralı $p(y)$ yi aşağıdaki gibi bekleriz.

$$p(y) \rightarrow (2\pi\beta)^{-1/2} \exp[-(y-1)^2/(2\beta)] \quad \dots\dots\dots(81)$$

β , 0 dan ∞ a artarken $p(y)$, (81) den (80) e değişir.

Şimdi Bölüm II de bahsedilen bazı sonuçları Volterra serisi için uyguluyoruz. (78) sistem eşitliği sıfır hariç tüm kernelleriyle bir Volterra serisine karşılık gelir $n = 2$ için,

$$g_2(u_1, u_2) = 2b(u_1)\delta(u_2 - u_1)$$

$$G_2(f_1, f_2) = 2B(f_1 + f_2) \quad \dots\dots\dots(82)$$

(11) ve (13) e karşı gelen daha tamam (180) seriden görüyoruz ki $p(y)$ için $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ kumulantları, $(W)(1, -1)/2$, $(WW)(1, 2)(-1, -2)/2$, $(WWW)(1, 2)(-1, 3)(-2, -3)$, $.3(WWWW)(1, 2)(-1, 3)(-2, 4)(-3, -4)$ ifadelerinin integralleridir. Burada (180) de olduğu

gibi $(w), (ww), (1,2), \dots$ ifadeleri sırasıyla $W_x(f_1), W_x(f_1)W_x(f_2), G_2(f_1, f_2), \dots$ ifadelerini göstermektedir. İntegrantların Gauss formu integral alınmasına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1 & \kappa_2 &= 2/c, & c &= (4\beta^{-2} + 1)^{1/2} \\ \kappa_3 &= 32/(3c^2 + 1) & \kappa_4 &= 96/[c(c^2 + 1)] \end{aligned} \dots\dots\dots(83)$$

κ_1 ve κ_2 değerleri (ortalama ve varyans), $p(y)$ nin (80) ve (81) formlarından limitinin alınmasıyla elde edilmektedir. β küçük olduğu zaman $c \rightarrow 2/\beta$ ve $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ ün değerleri sırasıyla $\beta, 8\beta^2/3, 12\beta^3$ değerlerine yaklaşır. Böylece varyans β ya yaklaşır ve (181) gösteriyor ki γ_1 eğriliği, $(8/3)\beta^{1/2}$ ye γ_2 fazlalığı, 12β ya yaklaşır. Edgeworth serisi (182), normal kural (81) in nasıl yaklaştırıldığını gösteriyor:

$$p(y) = \beta^{-1/2} \left\{ Z(u) - \frac{9}{4}\beta^{1/2}Z^{(3)}(u) + \beta \left[\frac{1}{2}Z^{(4)}(u) + \frac{8}{81}Z^{(6)}(u) \right] - \dots \right\} \dots\dots\dots(84)$$

Burada $u = (y - 1)/\beta^{1/2}$ ve $Z(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2)$. (184) ten $p(y)$ nin en yoğun elektrik yükü $y_0 \approx 1 - (4\beta/3)$ da meydana çıkar, burada $p(y_0)$, β varyansı ile bir normal kuralın $(2\pi\beta)^{-1/2}$ olan zirve değerinden yaklaşık $[1 + (49\beta/54)]$ defa daha yüksektir.

Bu aşamada, iki terim Volterra serisi için Bölüm III-C de verilen özel sonuçlara gidiyoruz. $W_x(f)$ nin Gauss formu ve $G_2(f_1, f_2)$ için örneğimizde, Tablo II nin 4.üncü satırı ile çalışmak uygundur. Örneğimiz için integral eşitlikleri ,

$$\lambda \Psi(f) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-f^2/2) \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 2\Psi(f_1) \exp\left[-(f - f_1)^2/(2\beta^2)\right] \dots\dots\dots(85)$$

k.inci eigen değeri ve fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{4}{c+1} \left(\frac{c-1}{c+1} \right)^k \\ \Psi_k(f) &= A_k \exp\left[-\frac{1}{4}(c+1)f^2\right] H_k \left[f \left(\frac{c}{2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(86)$$

Burada A_k , sadece k ya ve aşağıda verilen Hermite polinomuna bağlıdır.

$$H_k(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx} \right)^k e^{-x^2} \quad H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x.$$

(86) nın (85) in bir çözümü olduğu aşağıdaki (87) nin yardımıyla gösterilebilir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2 + qx} H_k(rx) dx = \left(\frac{\pi}{p} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r^2}{p} \right)^{k/2} \exp\left[\frac{q^2}{4p} \right] H_k \left[\frac{qr}{2p} \left(1 - \frac{r^2}{p} \right)^{-1/2} \right] \dots\dots\dots(87)$$

Örneğimizde ξ_k parametresi sıfırdır çünkü iki terim Volterra serisinin ilk terimi eksiktir ve $p(y)$ ve κ_m leri hesaplamak için sadece λ_k ihtiyacımız var. $p(y)$ için (186) integrali, aşağıdaki gibi olur.

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-jyz} / \prod_{k=0}^{\infty} [1 - 4jz p^k (c+1)^{-1}]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(88)$$

Burada $p = (c-1)(c+1)$. (188)deki seri m.inci kümülant için (89) u verir.

$$\kappa_m = \frac{(m-1)!}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^m = \frac{(m-1)! 2^{2m-1}}{(c+1)^m - (c-1)^m} \quad \dots\dots\dots(89)$$

$m=1,2,3,4$ için (83) ile mutabıktır. (188)deki integrallerden κ_m yi hesaplama, aslında (83)ü elde etmek için kullanılan katlı integralleri değerlendirmeye aynıdır.

Prosedürü izah için iki terim Volterra serinin ilk terimi verildiğinde,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} du g_1(u) x(t-u) + \int_{-\infty}^{+\infty} du b(u) x^2(t-u) \quad \dots\dots\dots(90)$$

ifadesini göz önüne alıyoruz. Burada,

$$g_1(u) = \alpha \beta_1 (2\pi)^{1/2} \exp(-2\pi^2 \beta_1^2 u^2) \quad G_1(f) = \alpha \exp[-f^2 / (2\beta_1^2)] \text{ dir.} \quad \dots\dots\dots(91)$$

Şimdi $p(y)$ ve κ_m leri hesaplamak için [(86)da verilen] λ_k ya ek olarak bir de ξ_k parametresine ihtiyacımız var. Tablo II nin 4.üncü satırında verilen $\Psi_k(f)$ için ortonormalizasyon ilişkisi Hermit polinomları için meydana gelir (ters yüz) ve (86)daki A_k normalizasyon sabiti için $j^k c^{1/4} (2\pi k! 2^k)^{-1/2}$ ifadesini verir. Tablo II nin son sütununda verilen ξ_k için integralde normalize edilmiş $\Psi_k(-f)$ yerine yazıldığında ve (87) nin yardımıyla değerlendirilen sonuç, bulundu ki k tek iken ξ_k , sıfır ve k çift iken aşağıdaki gibidir.

$$\Psi_{2n} = \alpha \frac{c^{-1/4}}{n! 2^n} \left[\frac{(2n)! 2}{a'+1} \right]^{1/2} \left[\frac{a'-1}{a'+1} \right]^n \quad a' = (2\beta_1^{-2} + 1)/c \quad \dots\dots\dots(92)$$

Halen $\kappa_1 = 1$ fakat (188)den $m \geq 2$ için κ_m (89) un toplamı artı,

$$\begin{aligned} \frac{m!}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{2n}^2 \lambda_{2n}^{m-2} &= \alpha^2 c^{-1/2} \frac{m!}{a'+1} \left(\frac{4}{c+1} \right)^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} \left[\left(\frac{a'-1}{a'+1} \right)^2 \left(\frac{c-1}{c+1} \right)^{2m-4} \right]^n \\ &= \alpha^2 c^{-1/2} m! 4^{m-2} \left[(a'+1)^2 (c+1)^{2m-4} - (a'-1)^2 (c-1)^{2m-4} \right]^{-1/2} \quad \dots\dots(93) \end{aligned}$$

buradan > 0 olduğunda $(\alpha)_0 = 1$ ve $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)$. $m \geq 2$ olduğunda seri daima yakınsar ve $m = 2, 3, 4$ için (180)genel katlı integrallerden elde edilenlerle uygun değerler verir.

$m = 1$ olduğunda (93) ün sol tarafı $\xi_k^2 / (2\lambda_k)$ formudur. Bölüm VIII-C de belirtildiği üzere eğer bu seri bir S değerine yakınsarsa ve tüm λ_k lar pozitif ise $y(t)$ asla $-S$ değerinden küçük değildir. (93)de $m = 1$ koyup c ve a' yerine β ve β_1 bant genişliklerinin terimlerdeki ifadeleri yeniden yerleştirilmesi gösterir ki $\beta^2 < 2\beta_1^2$ olduğunda seri yakınsaktır ve aşağıdaki değeri verir.

$$S = \frac{\alpha^2 \beta_1^2}{4\beta} (2\beta_1^2 - \beta^2)^{-1/2} \dots\dots\dots(94)$$

Pollak a borçlu olduğumuz $y(t) \geq -S$ eşitsizliği daha genel bir sonucun özel bir halidir. Böylece $b(u)$ (90) da asla negatif olamaz.

$$g_1(u)x(t-u) + b(u)x^2(t-u) \geq -g_1^2(u)/(4b(u))$$

$$y(t) \geq - \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^2(u) du / (4b(u)). \dots\dots\dots(95)$$

$\beta^2 < 2\beta_1^2$ olduğunda örneğimizin $g_1(u)$ ve $b(u)$ için integral yakınsaktır ve $y(t) \geq -S$ verir.

Sonuç olarak, $\beta \rightarrow \infty$ olduğunda $y(t)$ için (90)da ikinci integral $x^2(t)$ olur ve $k > 0$ için $c \rightarrow 1$, $\lambda_0 \rightarrow 2$, $\lambda_k \rightarrow 0$. Bununla beraber $\Psi_k(f)$ ve bunlardan hesaplanan ξ_k değişmez. $p(y)$ için (186) integralindeki $Q(z)$ faktöründeki üs, (188)den $\kappa_2 - \lambda_0^2/2$ ye eşit olan $\sum \xi_k^2$ toplamını içerir.

Genelde iki terim Volterra serisinde ikinci terim $a_2 x^2(t)/2$ olduğunda yukarıdaki örneklerle karşılaştırmadan ve Tablo II nin 4.üncü satırından anlaşılır ki $k > 0$ için $\lambda_0 = a_2 \sigma^2$, $\Psi_0(f) = W_x(f)/\sigma$, $\lambda_k = 0$ ve

$$Q(z) = (1 - j\lambda_0 z)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \left[\kappa_2 + j\lambda_0 z \xi_0^2 (1 - j\lambda_0 z)^{-1} \right] \right\}$$

$$\xi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} df G_1(f) W_x(f) / \sigma$$

$$\kappa_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} df W_x(f) G_1(f) G_1(-f) \dots\dots\dots(96)$$

burada $\sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle$.

BÖLÜM II. FORMÜLLERİN TÜRETİLMESİ

V. DİREKT AÇILIM METODUYLA İLGİLİ FORMÜLLER

Direkt açılım metodu keyfi derecenin Volterra transfer fonksiyonuyla uğraşırken kullanışlıdır. Brunonun bir fonksiyonun fonksiyonunun n.inci türev formülü ve Maclaurin serisinin yardımıyla açılım genelde başarılıdır(üstesinden gelir).Sıklıkla açılım sonucu,simetrike edilmek zorunda olan simetrik olmayan kernellerle bir Volterra serisidir.

Burada Bölüm III de listelenen Volterra transfer fonksiyonları için genel ifadelerin çatısına kısaca değinilmektedir.

A. $[y(t)]^l$ İçin Volterra Serisi

Bu bölüm, l bir pozitif tamsayı olmak üzere $[y(t)]^l$ için Volterra serisindeki n.inci $g_n(u_1, \dots, u_n)$ kerneli için bir ifadenin türevine ayrılmıştır.

$y(t)$ için (1) Volterra serisinde $x(t-u_i)$ ile $\xi x(t-u_i)$ yeniden yazılmasıyla elde edilen $H(\xi)$ fonksiyonunu tanıtıyoruz. t zamanı $H(\xi)$ ye parametre olarak girer ve $H(1)$, $y(t)$ ye eşittir. $F(z), z^l$ olsun.

$$[H(\xi)]^l = F[H(\xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[\frac{d^n}{d\xi^n} F[H(\xi)] \right]_{\xi=0} \text{ dir.} \quad \dots\dots\dots(97)$$

n.inci türev belki Brunonun bir fonksiyonun fonksiyonunun türevi formülüyle değerlendirilmiştir:

$$\frac{d^n}{d\xi^n} F[H(\xi)] = \sum_{k=1}^n F^{(k)}[H(\xi)] \sum_{(v;k,n)} N(v_1, v_2, \dots, v_k) H^{(v_1)}(\xi) H^{(v_2)}(\xi) \dots H^{(v_k)}(\xi) \dots(98)$$

burada,k l yerine geçmiştir,toplam sembolü (24)dekiyle aynıdır ve N, (26) ile verilen $N(v_1, v_2, \dots, v_k)$ dir.

k.inci türev $F^{(k)}(z)$, $l(l-1)\dots(l-k+1)z^{l-k}$ dir. $\xi = 0$ için $H(\xi)$ sıfır olduğundan beri $k \neq l$ için $F^{(k)}[H(0)]$ sıfırdır ve $k=l$ için $l!$ dir. $y(t)$ için (1) Volterra serisinde ξ koyarak elde edilen $H(\xi)$ için seriyi diferansiyelini almak gösterir ki

$$H^{(v)} = (0) \left[\frac{d^v}{d\xi^v} F[H(\xi)] \right]_{\xi=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_v g_v(u_1, \dots, u_v) \prod_{r=1}^v x(t-u_r) \quad \dots\dots\dots(99)$$

Bu değerler (98) de yerine geçirildiğinde, $l \leq n$ için sonuç aşağıdadır.

$$\left[\frac{d^n}{d\xi^n} F[H(\xi)] \right]_{\xi=0} = l! \sum_{(v;l,n)} N(v_1, \dots, v_l) \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_{v_1}(u_1, \dots, u_{v_1}) \dots g_{v_l}(u_{\mu}, \dots, u_n) \prod_{r=1}^n x(t-u_r) \quad \dots\dots\dots(100)$$

$l > n$ için (100) ün sağ tarafı sıfırdır.

(97) de (100) yerine yazılıp , $\xi = 1$ yerleştirildiği ve integraller içerisinde $(v;l,n)$ toplamı alındığında $[y(t)]^l$ için bir seri verir. Bu seri (101) deki yapılar simetrize edilerek Volterra serisine çevrilebilmektedir.

$$g_{v_1}(u_1, \dots, u_{v_1}) \dots g_{v_l}(u_{\mu}, \dots, u_n) \equiv P(u_1, \dots, u_n) \quad \dots\dots\dots(101)$$

Burada g_v ler simetriktir.

$P(u_1, \dots, u_n)$ de n indislerinin permüte edilmesiyle meydana gelen simetrik fonksiyon ve eklemek aşağıdaki ifadenin sağ tarafına sadeleştirilebilir [bak(120)].

$$\frac{1}{n!} \sum_{n!} P(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{N} \sum_N' P(u_1, \dots, u_n) \quad \dots\dots\dots(102)$$

Burada N , (26) ile verilmiş ve (100)deki $N(v_1, \dots, v_l)$ gibi aynıdır. (24) deki gibi $\sum_N'$ toplamı, özdeş olmayan N yapıları üzerinde toplamı göstermektedir. u_1 atanmış olan keyfi bir sayısal değer, u_2 bundan farklı fakat diğer taraftan keyfi bir değer vb olsun. Bu durumda $P(u_1, \dots, u_n)$ kesin bir sayısal değer alacaktır. Bölüm V-C de (102) , $P(u_1, \dots, u_n)$ nin bu değerini değiştirmeyen permütasyonlar hesaplanarak elde edilecektir.

Böylece, (101)deki yapıları simetrize etmenin etkisi, $\sum_N'$ toplamıyla (100)de $N(v_1, \dots, v_l)$ i yeniden yerleştirmek içindir. Bu bizi (103)e götürür.

$$g_n^{(l)}(u_1, \dots, u_n) = l! \sum_{(v;l,n)} \sum_N' g_{v_1}(u_1, \dots, u_{v_1}) \dots g_{v_l}(u_{\mu}, \dots, u_n) \quad \dots\dots\dots(103)$$

(103) ifadesinin her iki tarafının n -katlı Fourier dönüşümünü alınırsa $G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n)$ için (24)ü verir:

$$G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n) = l! \sum_{(v;l,n)} \sum_N' G_{v_1}(f_1, \dots, f_{v_1}) \dots G_{v_l}(f_{\mu}, \dots, f_n) \quad \dots\dots\dots(104)$$

B. Keyfi Seviyeden Volterra Transfer Fonksiyonları

n keyfi olduğunda $G_n(f_1, \dots, f_n)$ için Bölüm III de bulunan ifadeleri türetmek için, $[y(t)]^l$ ile ilgili sonuçlar ve simetrizasyon bu bölümde kullanılmıştır.

Öncelikle (37) diferansiyel eşitliği göz önüne al. $x(t)$, $\exp(j\omega t)$ olarak alındığında ve $y(t)$, (32) üslerinin serisi olarak alındığında, (37) de yerine koyma ve $\exp(j\omega_1 t)$ nin katsayılarını eşitleme, $n > 1$ ifadesini verir. $n > 1$ için, $x(t)$ yi n üslerinin toplamı olarak alalım ve kabul edelim ki $y(t)$ n -katlı bir seriye açılabilir, $n = 2$ durumu için (33)e benzer $\exp[j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t]$ nin kasayısı $G_n(f_1, \dots, f_n)$ dir. Bundan sonra $[y(t)]^l$, $\exp[j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t]$ nin katsayısı $G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n)$ olan benzer bir seriye açılabilir. $l > n$ olduğunda bu serileri (37) diferansiyel eşitliğinde yerine yazma, $\exp[j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t]$ nin katsayılarını eşitleme ve $G_n^{(l)}$ nin sıfır olması aşağıdaki ifadeyi verir.

$$F(j\omega_1 + \dots + j\omega_n)G_n(f_1, \dots, f_n) + \sum_{l=2}^n a_l G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n) = 0 \quad \dots\dots\dots(105)$$

Şekil3 te gösterilen sistem için sistem eşitliği, (42) serisini eşitleyerek elde edilmektedir. $H(f)$ kabulü üzerindeki akım için:...

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l [y(t)]^l = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) [x(t-\tau) - y(t-\tau)] d\tau \quad \dots\dots\dots(106)$$

burada $h(t)$, $H(f)$ nin Fourier dönüşümüdür. $x(t)$ yi $\exp(j\omega_1 t)$ olarak almak, $y(t)$ için (32) serisini alma ve (106) da $\exp(j\omega_1 t)$ nin katsayılarını eşitlemek aşağıdaki ifadeyi verir.

$$a_1 G_1(f_1) = H(f_1) - G_1(f_1) H(f_1) \quad \dots\dots\dots(107)$$

$n > 1$ için, $x(t)$ yi n üslerinin toplamı olarak alma ve $\exp[j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t]$ nin katsayılarını eşitleme (108) i verir.

$$a_1 G_n(f_1, \dots, f_n) + \sum_{l=2}^n a_l G_n^{(l)}(f_1, \dots, f_n) = -G_n(f_1, \dots, f_n) H(f_1 + \dots + f_n) \quad \dots\dots\dots(108)$$

Şekil3 ün devresi için (43) tekrarlı ilişkisi, (107) ve (108) i takip eder.

Şimdi Şekil1 e dönüyoruz. modülatör-filtre-demodülatör sistemi için sistem eşitliği (46) ve (47) ile verilmektedir. $G_n(f_1, \dots, f_n)$ için (49) ifadesinin türetilmesine başlamak için $H(\xi)$ yi aşağıdaki gibi tanımlarız.

$$H(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) h[\xi x(t-u)] du \quad \dots\dots\dots(109)$$

burada t , $H(\xi)$ de bir parametre olarak ilişkilendirilmiştir. $\xi = 1$ olduğunda $F[H(\xi)]$ fonksiyonu $y(t)$ ye eşittir. Yine direkt açılımla,

$$F[H(\xi)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[\frac{d^n}{d\xi^n} F[H(\xi)] \right]_{\xi=0} \quad \dots\dots\dots(110)$$

burada Brunun (98) formülüyle n.inci türevi değerlendirebiliriz.Bunun için, (47) ve (109) u takip eden aşağıdakilere ihtiyacımız var.

$$\begin{aligned} H^{(v)}(0) &= h_v \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) [x(t-u)]^v du \\ H(0) &= z_0 \\ F[H(0)] &= F(z_0) = 0 \\ F^{(l)}[H(0)] &= \left[\frac{d^l}{dz^l} F(z) \right]_{z=H(0)} = F_l \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(111)$$

(110) da Brunonun formülünün kullanımı ve $\xi = 1$ yerleştirmesi aşağıdaki ifadeyi verir.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=1}^{\infty} F_l \sum_{(v;l,n)} N(v_1, \dots, v_l) H^{(v_1)}(0) \dots H^{(v_l)}(0) \quad \dots\dots\dots(112)$$

$H^{(v)}(0)$ için integrali yeniden aşağıdaki gibi yazarız.

$$\begin{aligned} H^{(v)}(0) &= h_v \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_v \varphi_v(u_1, \dots, u_v) x(t-u_1) \dots x(t-u_v) \\ \varphi_1(u_1) &= g(u_1) \\ \varphi_v(u_1, \dots, u_v) &= g(u_1) \delta(u_2 - u_1) \dots \delta(u_v - u_1) \quad v > 1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(113)$$

burada $G(f), g(t)$ nin Fourier dönüşümü (48) olmak üzere , $\varphi_v(u_1, \dots, u_v)$, $G(f_1 + \dots + f_v)$ V- katlı Fourier dönüşümüne sahip bir simetrik fonksiyon olarak ilişkilendirilebilmektedir. Bundan sonra (112) aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n \gamma_n(u_1, \dots, u_n) \prod_{r=1}^n x(t-u_r) \\ \gamma_n(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{l=1}^n F_l \sum_{(v;l,n)} h_{v_1}, \dots, h_{v_l} N(v_1, \dots, v_l) \varphi_{v_1}(u_1, \dots, u_{v_1}) \dots \varphi_{v_l}(u_{\mu}, \dots, u_n) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(114)$$

burada $\gamma_n(u_1, \dots, u_n), n > 2$ olduğunda genelde simetrik değildir.(114) ü Volterra serisine çevirmek için (112) nin yardımıyla $\gamma_n(u_1, \dots, u_n)$ i simetrize edebiliriz.simetrizasyonun başarılması özdeş olmayan N yapıları üzerinde alınan $\sum_N$ toplamıyla $N(v_1, \dots, v_l)$ yi yeniden yerleştirmektedir.Böylece (114), simetrik kernelle Volterra serisine(1) gider.

$$g_n(u_1, \dots, u_n) = \sum_{l=1}^n F_l \sum_{(v;l,n)} h_{v_1}, \dots, h_{v_l} \sum_N \varphi_{v_1}(u_1, \dots, u_{v_1}) \dots \varphi_{v_l}(u_{\mu}, \dots, u_n) \quad \dots\dots\dots(115)$$

Bu kernel,göstermek istediğimiz gibi (49)da bulunan n-katlı $G_n(f_1,...,f_n)$ Fourier dönüşümüne sahiptir.

Son olarak,Şekil2 sisteminin feedback için $G_n(f_1,...,f_n)$ i veren genel tekrarlı ilişki(58) nin türevikısaca tanımlıyoruz. $x(t)$ nin gücünde $w(t)$ için Volterra serisinde(59) t yerine $t-u'_q$ yerleştirilirse $w(t-u'_q)$ için bir seri elde edilir. $y(t)$ için (53) sistem eşitliğinde $\prod_{q=1}^l w(t-u'_q)$ yapısı bir $i_1+...+i_q=n$ -katlı integralin n katlı toplamı olarak yazılabilmektedir.Toplaman seviyesini değiştirip kullanılırsa $y(t)$ için bir seriye(116) götürür.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_l=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \sum_{i_1+i_2+...+i_l=n} \sum_{r=1}^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_l \varphi_n(u_1,...,u_n) \prod_{r=1}^n x(t-u_r) \quad \dots\dots\dots(116)$$

burada,

$$\varphi_n(u_1,...,u_n) = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l!} \sum_{i_1+i_2+...+i_l=n} \frac{n!}{i_1! \dots i_l!} \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du'_l m_l(u'_1,...,u'_l) k_{i_1}(u_1-u'_1,...,u_{i_1}-u'_{i_1}) \dots k_{i_l}(...,u_{i_l}-u'_{i_l}) \quad \dots\dots\dots(117)$$

(116)nın (1) $y(t)$ için Volterra seri ile karşılaştırılması gösterir ki $\varphi_n(u_1,...,u_n)$ nin simetrize edilmiş veriyonu $g_n(u_1,...,u_n)$ dir.i.e. φ_n nin n -katlı $\Phi_n(f_1,...,f_n)$ Fourier dönüşümünün simetrize edilmiş versiyonu $G_n(f_1,...,f_n)$ dir. $G_n(f_1,...,f_n)$ için (58) genel ifadesinde görünen $K_{v_1}, K_{v_2}, ..., K_{v_l} M_l$ yapısıyla aynı forma sahip(v lerle i ler yeniden yerleştirilmiş) bir $K_{i_1}, K_{i_2}, ..., K_{i_l} M_l$ yapısıyla l -katlı integral yeniden yerleştirilerek Φ_n için bir ifade (117) nin sağ tafından elde edilebilmektedir. Bu yapı (ve aynı zamanda $f_1+...+f_l$ argümanlarıyla M_l fonksiyonu) Bölüm III-C de üzerinde durulan $P(f_1,...,f_n : i_1,...,i_l)$ yapısıyla aynı tip simetriye sahiptir. Φ_n i (123) yardımıyla simetrize etme, G_n ye eşit sonuçları yerleştirme, Φ_n de $l=1$ için G_n i içeren tek terim dir ve G_n için çözüm, (58)in türetilmesini tamamlar.

C. Simetrik Fonksiyonların Yapılarının Simetrizasyonu

“ SV ” “simetrize edilmiş versiyonu” temsil etmek üzere, keyfi $F(f_1,...,f_n)$ fonksiyonunun simetrize edilmesiyle elde edilen fonsiyon $\{SV F(f_1,...,f_n)\}$ seklinde ifade edilmektedir:

$$\{SV F(f_1,...,f_n)\} = \frac{1}{n!} \sum_{n!} F(f_1,...,f_n) \quad \dots\dots\dots(118)$$

Burada $\sum$ üzerindeki $n!$ indisi, f lerin üzerindeki indislerin tüm $n!$ permütasyonları üzerinde toplamın açıldığını gösterir. $P(...)$ yapısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(f_1,...,f_n : i_1,...,i_l) \equiv s_{i_1}(f_1+...+f_{i_1}) s_{i_2}(f_{i_1+1}+...+f_{i_1+i_2}) \dots s_{i_l}(f_{n-i_l+1}+...+f_n) \\ i_1+i_2+...+i_l=n, \quad 1 \leq i_q \leq n, \quad q=1,2,...,l \quad \dots\dots\dots(119)$$

Burada $s_i(\dots)$ fonksiyonları, argümanlarının simetrik fonksiyonlarıdır.

Öncelikle aşağıdakini ele alıyoruz,

$$\{SV F(f_1, \dots, f_n)\} = \frac{1}{N} \sum_N P(f_1, \dots, f_n : v_1, \dots, v_l) \quad \dots\dots\dots(120)$$

burada n, l ve v_i tamsayılarının kümesi verilmektedir. v ler (25)de olduğu gibi tam sayılardır.

$$v_1 + v_2 + \dots + v_l = n, \quad 1 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l \quad \dots\dots\dots(121)$$

(120)nin sağ tarafındaki toplam,(26) ile bağlantılı olarak tüm özdeş olmayan yapılar üzerinedir. Toplamdaki bu tip yapı aşağıdadır.

$$N = n! / (v_1! \dots v_l! r_1! \dots r_p!) \quad \dots\dots\dots(122)$$

Burada $r_1, v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l$ düzeninde eşit v lerin ilk adımında eşit v lerin sayısı, r_2 ise ikinci adımın numarası vb. dir.

(120) nin sağlamasını yapmak için, $s_v(\dots)$ nin argümanları içindeki f_k lar permüte edildiğinde $P(\dots)$ nin değerinin $v_1, \dots, v_l$ değerlerinin verilen bir kümesi değiştirilmedi. $v_1! \dots v_l!$ gibi permütasyonlar vardır. Dahası $P(\dots)$ nin değeri, eşit indislerle s_v permüte etmeyle değiştirilmemiştir. Bu türün permütasyonu $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l$ durumunu bozmaz. $r_1! r_2! \dots r_p!$ şeklinde permütasyonlar vardır. $f_1, \dots, f_n$ nin $n!$ permütasyonu ile verilen $P(\dots) n!$ nicelikleri, $P(\dots)$ nin değerine göre kümeler içerisine bölümlenebilmektedir. Her kümedeki eleman sayıları aynıdır ($v_1! \dots v_l! r_1! r_2! \dots r_p! = M$ ve kümelerin sayısı, $N = n! / M$ dir. N kümeleri üzerinde bir toplam için $n!$ permütasyonları [gör(118)] üzerinde toplamı değiştirme, istenen ilişkiyi (120) verir.

Aşağıdakini sağlatacağız. Verilen n ve l ,

$$\left\{ SV \frac{1}{l!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_l=n} \frac{n!}{i_1! \dots i_l!} P(f_1, \dots, f_n : i_1, \dots, i_l) \right\} = \sum_{(v;l,n)} \sum_N P(f_1, \dots, f_n : v_1, \dots, v_l) \quad \dots\dots\dots(123)$$

burada soldaki toplam $i_1 + \dots + i_l = n$ gibi $i_1, \dots, i_l$ tamsayıları üzerinde alınmakta ve $1 \leq i_q \leq n$ [gör(119)]. Sağdaki $\sum$ altındaki $(v;l,n)$, (121)i sağlayan v tamsayılarının tüm kümeleri üzerindeki toplamı göstermektedir. (123) ü sağlatmak için $(v;l,n)$ de her bir $v_1, v_2, \dots, v_l$ kümesi için karşı gelme, v lerin değeri değiştirilmiş olan sinyali i lerin $i_1, \dots, i_l$ nin kümeleri $l! / (r_1! r_2! \dots r_p!)$ tane vardır. Bu i lerin kümelerinden herhangi biri için 1) $i_1! \dots i_l! = v_1! \dots v_l!$ ve 2)

$$\{SV P(f_1, \dots, f_n : i_1, \dots, i_l)\} = \{SV P(f_1, \dots, f_n : v_1, \dots, v_l)\} \quad \dots\dots\dots(124)$$

Bundan dolayı (123)ün sol tarafı, istenen ilişki (123) olan aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=n} \frac{n!}{i_1! \dots i_n!} \{SV P(f_1, \dots, f_n : i_1, \dots, i_n)\} = \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=n} \frac{n!}{v_1! \dots v_l! r_1! \dots r_p!} \{SV P(f_1, \dots, f_n : v_1, \dots, v_l)\} \\
& = \sum_{(v,l,n)} N \{SV P(f_1, \dots, f_n : v_1, \dots, v_l)\} \\
& = \sum_{(v,l,n)} \sum_N P(f_1, \dots, f_n : v_1, \dots, v_l) \dots\dots\dots(125)
\end{aligned}$$

VI. ÇIKIŞIN BASİT ÖZELLİKLERİ

Burada, Volterra transfer fonksiyonları için (1) Volterra serisi ve (2) ifadesi, harmonik ve Gauss girişleriyle uğraşmaya uygun formlarda yeniden hesaplanmaktadır. Yeni formlar 1) ve 2) yi elde etmek için uygulanarak izah edilmekte, **1)** $x(t)$ bir sinüs dalgası veya iki veya üç sinüs dalgasının toplamı olduğunda $y(t)$ için Bölüm II-A da listelenen ifadelerin genel formu. ve **2)** $x(t)$ Gauss tipinde olduğunda $y(t)$ nin dc değeri için ifade. $x(t)$ Gauss tipinde olduğunda $y(t)$ nin dc değeri, beklenen değerine veya $\langle y(t) \rangle$ benzer miktarına eşittir.

A. Genel İlişkiler

$\exp[\alpha_1 x(t-u_1) + \dots + \alpha_n x(t-u_n)]$ nin açılımında $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ nin katsayısı olarak $x(t-u_1), \dots, x(t-u_n)$ yapılarını (1) de yazarak, öncü terimleri Bölüm II-A da verilen formüllerin türetilmesi basitleştirildi; i.e. aşağıdakiyle üssel fonksiyon üzerindeki işlemin sonucu olarak

$$D_\alpha^n \equiv \frac{\delta^n}{\delta \alpha_1 \dots \delta \alpha_n} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0} \dots\dots\dots(126)$$

$$\text{Böylece, } x(t-u_1) \dots x(t-u_n) = D_\alpha^n \exp \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t-u_s) \right] \dots\dots\dots(127)$$

$$= D_\alpha^n \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t-u_s) \right]^n / n! \dots\dots\dots(128)$$

ve $y(t)$ için (1) Volterra serisi aşağıdaki iki şekilde tekrar yazılabilmektedir.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) D_\alpha^n \exp \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t-u_s) \right] \dots\dots\dots(129)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) D_\alpha^n \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t-u_s) \right]^n / n! \dots\dots\dots(130)$$

$y(t)$ için (130) serisi ve n üssel terimlerin toplamı olarak $x(t)$ yi alarak $G_n(f_1, \dots, f_n)$ in hesaplanma metodu, kullanışlı ifadelere götürür.

$$G_n(f_1, \dots, f_n) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) D_\alpha^n \prod_{r=1}^n A_n(f_r) A_n(-f_r) \dots (131)$$

burada, $A_n(f) = \sum_{s=1}^n e^{-j\omega u_s}, \quad \omega = 2\pi f \dots (132)$

Aşağıdaki sonuç, $x(t)$, iki taraflı $W_x(f)$ güç spektrumuyla Gauss tipinde olduğunda, $y(t)$ için (129) tekrar yazılan Volterra serisiyle birlikte kullanılacaktır. L , aşağıdaki gibi bir lineer operatör (t nin fonksiyonları üzerinde işlem) olsun.

$$L[e^{j\omega t}] = H(f)e^{j\omega t}, \quad \omega = 2\pi f \dots (133)$$

Sonra

$$\langle \exp\{L[x(t)]\} \rangle = \exp\left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df W_x(f) H(f) H(-f)\right] \dots (134)$$

B. Harmonik Giriş

$x(t) = P \cos pt$, $p = 2\pi f_p$ olduğunda (130)daki sağ kısım toplamı aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \alpha_s x(t - u_s) &= \frac{1}{2} P \sum_{s=1}^n \alpha_s (e^{jpt - jpu_s} + e^{-jpt + jpu_s}) \\ &= \frac{1}{2} P [e^{jpt} A_n(f_p) + e^{-jpt} A_n(-f_p)] \dots (135) \end{aligned}$$

burada A_n , (132) ile verilmektedir. Binomial teoreminden,

$$D_\alpha^n \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t - u_s) \right] / n! = \left(\frac{P}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\exp[j(2k - n)pt]}{k!(n - k)!} A_n^k(f_p) A_n^{n-k}(-f_p) \dots (136)$$

Bunu $y(t)$ için (130)da yerine yazıp G_n için (131)i kullanmak aşağıdaki ifadeyi verir.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\exp[j(2k - n)pt]}{k!(n - k)!} G_{k, n-k}(f_p) \dots (137)$$

Burada $G_{k, n-k}(f_p)$, $G_n(f_1, \dots, f_n)$ yi gösterir. f_i nin ilk k sı, $+f_p$ ye eşittir ve kalan $n - k$, $-f_p$ ye eşittir.

$2k - n = N \geq 0$ için (137)de terimleri seçme gösterir ki $y(t)$ nin $\exp(jNt)$ bileşeni aşağıdadır.

$$e^{jNpt} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(p/2)^{2l+N}}{(N+l)!!!} G_{N+l, l}(f_p) \dots (138)$$

$N=0$ olduğunda görünen $G_{0,0}(f_p)$ nin değeri sıfırdır çünkü $G_0 \equiv 0$ dır. (138)de p ve f_p nin işaretlerini değiştirme, $y(t)$ nin $\exp(-jNt)$ bileşenini verir. $x(t)=P\cos(pt+\phi)$ için $y(t)$ (137) ve (138)de pt yerine $pt+\phi$ yazılarak verilmektedir. Çıkış bileşenleri için bu ifadeler Mircea [7] tarafında verilen formüllere benzemektedir.

Aynı tip argümanlar gösterir ki $x(t)=P\cos pt+Q\cos qt$ olduğunda $M \geq 0$ ve $N \geq 0$ için $y(t)$ deki $\exp[j(Np+Mq)t]$ bileşeni aşağıdadır.

$$e^{j(Np+Mq)t} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P/2)^{2l+N} (Q/2)^{2k+M}}{(N+l)!!(M+k)!k!} G_{N+l,M+k,k}(f_p, f_q) \dots\dots\dots(139)$$

burada, $p=2\pi f_p$, $q=2\pi f_q$ ve G deki dört indisin manası şu ki $n=N+2l+M+2k$ ile $G_n(f_1, \dots, f_n)$ ye eşittir ve f_l nin ilk $N+l$ si f_p ye eşit, sonraki l , $-f_p$ ye eşit, sonraki $M+k$, f_q ye eşit ve son olarak k da $-f_q$ ya eşittir. (139)da p ve f_p nin işaretlerini değiştirme, $y(t)$ nin $\exp[j(-Np+Mq)t]$ bileşenini verir. vb.

Benzer şekilde $x(t)=P\cos pt+Q\cos qt+R\cos rt$ olduğunda $M \geq 0, N \geq 0$ ve $L \geq 0$ için $y(t)$ deki $\exp[j(Np+Mq+Lr)t]$ bileşeni aşağıdadır.

$$e^{j(Np+Mq+Lr)t} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(P/2)^{2l+N} (Q/2)^{2k+M} (L/2)^{2i+L}}{(N+l)!!(M+k)!k!(L+i)!i!} G_{N+l,M+k,k,L+i,i}(f_p, f_q, f_r) \dots\dots\dots(140)$$

burada $G_n(f_1, \dots, f_n)$ in seviyesi, $n=N+2l+M+2k+L+2i$ dir.

$x(t)$ deki kosinüs terimlerinde faz açıları görüldüğünde (139) ve (140) daki üssel terimlerde Npt yerine $Npt+N\phi_p$, Mqt yerine $Mqt+M\phi_q$ vb. yazarız.

C. Gauss Girişi İçin $y(t)$ nin Beklenen Değeri

$x(t)$ bir sıfır-mana durağan Gauss işlemi olduğunda, $y(t)$ nin beklenen değeri, (129) un iki taraflı averajından elde edilen $\langle y(t) \rangle$ benzer averajıdır ve (134) ün kullanımı aşağıdakini gösterir.

$$\left\langle \exp \sum_{s=1}^n \alpha_s x(t-u_s) \right\rangle = \exp J_{nAA} \dots\dots\dots(141)$$

$$J_{nAA} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df W_x(f) A_n(f) A_n(-f) \dots\dots\dots(142)$$

Burada nAA indisi (142) ve (150) ile öne sürülmektedir. $W_x(f)$, $x(t)$ nin iki taraflı güç spektrumu ve $A_n(f)$, (132) ile tanımlanmıştır. J_{nAA} için (142) integrali, (134) ü (141) ile bir tutarak elde edilmekte ve $H(f)$ in $A_n(f)$ ye gittiğini göstermek için kullanılır.

$$L[e^{j\omega t}] = e^{j\omega t} \sum_{s=1}^n \alpha_s e^{-j\omega u_s} = e^{j\omega t} A_n(f) \quad \dots\dots\dots(143)$$

Böylece $y(t)$ için (129) ifadesi aşağıdakini verir.

$$\langle y(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) D_{\alpha}^n \exp J_{nAA} \quad \dots\dots\dots(144)$$

Bundan sonraki adım $\exp J_{nAA}$ nın açılımıdır. $\pm \infty$ limitleriyle(sınır) $x_1, x_2, \dots, x_k$ ya göre n-katlı integral belirten $Q_k[h(x)]$ operatörünü tanımlamak için uygundur. $x_1, x_2, \dots, x_k$ nın fonksiyonu $h(x_1) \dots h(x_k)$ kere, integrant, $Q_k[h(x)]$ in sağ tarafına yerleşen terimlerle tanıtılmaktadır. $Q_0[h(x)]$ özdeş operatörü göstermektedir.

$$\begin{aligned} \exp J_{nAA} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} J_{nAA}^{\mu} \\ &= 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^{\mu}} Q_{\mu}[W_x(f)] \prod_{r=1}^{\mu} A_n(f_r) A_n(-f_r) \quad \dots\dots\dots(145) \end{aligned}$$

$\langle y(t) \rangle$ için (145)i (144) de yerine yazdığımızda, $\mu = 0$ a karşı gelen (145)deki 1 in katkısı yoktur çünkü $n \geq 1$ için 1 üzerinde D_{α}^n işleminin değeri 0 dır. n ve μ toplamlarının yer değiştirmesi aşağıdakini verir.

$$\langle y(t) \rangle = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^{\mu}} Q_{\mu}[W_x(f)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) D_{\alpha}^n \prod_{r=1}^{\mu} A_n(f_r) A_n(-f_r) \quad \dots\dots(146)$$

$A_n(f_r)$, α ların aynı cinsten lineer fonksiyonu olduğundan beri, (146)daki yapı α larda 2μ derecesinde; ve $n = 2\mu$ için olan hariç n-toplamındaki tüm terimler 0 dır. $n = 2\mu$ yerleştirme ve G_n için (131)i kullanılınca aşağıdaki ifadeye götürür.

$$\langle y(t) \rangle = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^{\mu}} Q_{\mu}[W_x(f)] G_{2\mu}(f_1, -f_1, f_2, -f_2, \dots, f_{\mu}, -f_{\mu}) \quad \dots\dots\dots(147)$$

bu ifade (11)de verilenin ilk iki terimidir.

$\langle y(t) \rangle$ için biraz benzer bir ifade Deutsch[12] tarafından verilmektedir.

VII. GÜÇ SPEKTRASI

Bu bölümde $y(t)$ nin iki taraflı $W_y(f)$ güç spektrumu iki durum için hesaplanmaktadır. İlkinde, $x(t)$ girişi, $W_x(f)$ güç spektrumu ile sıfır-mana durağan Gauss gürültüsüdür (Mircea-Sinnreich durumu). İkincisinde $x(t)$ girişi, bir sinüs dalgası artı sıfır-mana durağan Gauss gürültüsü,

$P_{\cos pt} + I_n(t)$ dir. İki durumda da $\langle y(t+\tau)y^*(t) \rangle$ benzer averajı hesaplandı ve sonra $W_y(f)$ yi elde etmek için Fourier dönüşümü alındı.

A. Gauss Girişi İçin $y(t+\tau)z(t)$

$y(t)$ (1) ile verilen Volterra serisi ve $z(t)$ de $g_n(u_1, \dots, u_n)$ in yerinde $g'_n(u_1, \dots, u_n)$ olan benzer bir seri olsun. İkisi de aynı Gauss gürültüsü $x(t)$ girişine sahip. $\langle y(t+\tau)z(t) \rangle$ benzer averajının hesaplan adımları benzer fakat $\langle y(t) \rangle$ nin hesaplanmasında kullanılan daha karmaşıktır.

Tekrar yazılan (129) serisinden,

$$\langle y(t+\tau)z(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dv_m g_n(u_1, \dots, u_n) g'_m(v_1, \dots, v_m) D_{\alpha}^n D_{\beta}^m \cdot \left\langle \exp \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t+\tau-u_s) + \sum_{s=1}^m \beta_s x(t-v_s) \right] \right\rangle \dots (148)$$

Üssel fonksiyonun benzer averajı yine (134)le verilendir fakat şimdi $H(f)$ aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

$$L[e^{j\omega t}] = e^{j\omega t} [e^{j\omega t} A_n(f) + B_m(f)] = e^{j\omega t} H(f) \dots (149)$$

Burada $A_n(f)$ halen (132) ile verilendir ve n, α, u yerine m, β, v yerleştirilmesiyle $B_m(f)$ yine (132) ile verilmektedir. Bundan dolayı (148)de üssel fonksiyonun benzer averajı $\exp K$ olarak yazılabilmektedir. Burada K ,

$$K = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df W_x(f) [A_n(f)A_n(-f) + B_m(f)B_m(-f) + 2e^{j\omega t} A_n(f)B_m(-f)] \\ = J_{nAA} + J_{mBB} + J_{nmAB} \dots (150)$$

$W_x(f)$ in çift olması, $\exp(j\omega\tau)$ içeren terimleri elde etmek için kullanılmıştır; J_{nAA} , $A_n(f)A_n(-f)$ içeren integraldir; vb.

$\exp J_{nmAB}$ yi (145)de $\exp J_{nAA}$ yapıldığı gibi aynı yolla açılması aşağıdaki ifadeyi verir.

$$e^K = \exp[J_{nAA} + J_{mBB}] \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k[W_x(f)]}{k!} \prod_{r=1}^k e^{j\omega_r \tau} A_n(f_r) B_m(-f_r) \right] \dots (151)$$

(148) de benzer averaj için yerine konduğu zaman $\exp[J_{nAA} + J_{mBB}]$ kere 1 in katkısı, (151)de $k=0$ için karşı gelen 1 olma, $\langle y(t) \rangle \langle z(t) \rangle$ dir. Bu, $\langle y(t) \rangle$ için (144) serisini takip eder. Değişmeyen kısmın katkısı, i.e. (151)deki $k \geq 1$ terimlerinden ortaya çıkan kısım, integrallerin ve toplamın seviyesini değiştirerek elde edilebilmektedir. İkili m yi değiştirdikten

sonra, n-toplamı, m-toplam ve n-toplamın yapısı olarak yazılabilmektedir. Bundan dolayı (151) in (148)de yerine konması aşağıdaki ifadeyi ortaya çıkarır.

$$\langle y(t+\tau)z(t) \rangle = a_0 b_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k [W_x(f)]}{k!} e^{j(w_1+\dots+w_k)t} a_k(f_1, \dots, f_k) b_k(f_1, \dots, f_k) \dots (152)$$

burada, $a_0 = \langle y(t) \rangle$, $b_0 = \langle z(t) \rangle$ ve $k > 0$ için,

$$a_k(f_1, \dots, f_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) D_{\alpha}^n e^{J_{nAA}} \prod_{r=1}^k A_n(f_r) \dots (153)$$

$b_k(f_1, \dots, f_k)$ fonksiyonu, (153)de n , u , g_n , α , $J_{nAA} A_n(f_r)$ yerine m , v , g'_m , β , $J_{mBB} B_m(-f_r)$ yazılarak elde edilen bir ifadeyle verilmektedir. Örneğin, $z(t) \equiv y(t)$ ise $b_k(f_1, \dots, f_k) = a_k(-f_1, \dots, -f_k)$ dir.

(153)de (145) serisini yerine koyma aşağıdaki niceliği kazandırır.

$$D_{\alpha}^n \left[\prod_{q=1}^{\mu} A_n(f'_q) A_n(-f'_q) \right] \left[\prod_{r=1}^k A_n(f_r) \right] \dots (154)$$

burada, (145)de r , f , f_r yerine q , f' , f'_q yazıldı. $A_n(f)$, α larda lineer ve aynı cinsten olduğundan beri $n = 2\mu + k$ olmadığı sürece sıfırdır. a_k için μ ve n üzerinde alınan ikili toplam, $n = 2\mu + k$ ile μ üncü terim olan μ üzerinde tekli toplama sadeleşir.

$$\frac{1}{\mu! 2^{\mu}} Q_{\mu} [W_x(f')] \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n g_n(u_1, \dots, u_n) \{ (154) \text{ifadesi} \} \dots (155)$$

$G_n(f_1, \dots, f_n)$ için (131) ifadesi gösterir ki katlı integral bir G_n fonksiyonuna gider. netice olarak $k > 0$, a_k için (153) serisi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} a_k(f_1, \dots, f_k) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{Q_{\mu} [W_x(f')]}{\mu! 2^{\mu}} G_{2\mu+k}(f_1, \dots, f_k, f'_1, -f'_1, \dots, f'_{\mu}, -f'_{\mu}) \\ &= G_k(f_1, \dots, f_k) + \frac{1}{1! 2} \int_{-\infty}^{+\infty} df'_1 W_x(f'_1) G_{2+k}(f_1, \dots, f_k, f'_1, -f'_1) \\ &\quad + \frac{1}{2! 2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} df'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df'_2 W_x(f'_1) W_x(f'_2) G_{4+k}(f_1, \dots, f_k, f'_1, -f'_1, f'_2, -f'_2) + \dots \dots (156) \end{aligned}$$

$b_k(f_1, \dots, f_k)$ için yerini tutan ifade, (156)da $G_{2\mu+k}$ fonksiyonları yerine $G'_{2\mu+k}(-f'_1, \dots, -f'_k, f'_1, -f'_1, \dots, f'_{\mu}, -f'_{\mu})$ konularak elde edilmektedir. Burada $z(t)$ için Volterra serisinde G'_m , g'_m kernelinin Fourier dönüşümüdür. $f_1, \dots, f_k$ ların işaretleri korunda çünkü

analizlerde $A_n(f_r)$ yerine $B_m(-f_r)$ geçer. Madem ki G_m ler simetriktir o halde $a_k(f_1, \dots, f_k)$ ve $b_k(f_1, \dots, f_k)$ da simetriktir. $b_k(f_1, \dots, f_k)$ için seri aşağıdadır.

$$b_k(f_1, \dots, f_k) = G'_k(-f_1, \dots, -f_k) + \frac{1}{1!2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1' W_x(f_1') G_{2+k}(-f_1, \dots, -f_k, f_1', -f_1') + \dots \quad (157)$$

(152)de $Q_\mu[W_x(f)]$ ile elde edilen integralleri yazmak, aşağıdaki gerekli ifadeyi verir.

$$\begin{aligned} \langle y(t+\tau)z(t) \rangle &= \langle y(t) \rangle \langle z(t) \rangle + \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 e^{j\omega_1 t} W_x(f_1) a_1(f_1) b_1(f_1) \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} W_x(f_1) W_x(f_2) a_2(f_1, f_2) b_2(f_1, f_2) + \dots \quad (158) \end{aligned}$$

burada a_k ve b_k , (156) ve (157) serileriyle verilmektedir.

$z(t) \equiv y(t)$ özel halinin üzerinde, $\langle y(t+\tau)z(t) \rangle$ yi hesaplayan bir prosedür tasarlayan Deutsch [12] tarafından duruldu.

B. Gauss Girişi İçin Güç Spektrumu

Karmaşık $y(t)$ ve Gauss tipi $x(t)$ için iki taraflı $W_y(f)$ güç spektrumu, (152)de $z(t) = y^*(t)$ yerleştirilerek elde edilen τ nun $\langle y(t+\tau)y^*(t) \rangle$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Sonra 1) $g'_m = g_m^*$, 2) $G'_{2\mu+k}(-f_1, \dots, -f_k, f'_1, -f'_1, \dots, f'_\mu, -f'_\mu) = G^*_{2\mu+k}(f_1, \dots, f_k, f'_1, -f'_1, \dots, f'_\mu, -f'_\mu) \dots (159)$ Ve 3) (156) ve (157) gösterir ki $b_k(f_1, \dots, f_k) = a_k^*(f_1, \dots, f_k)$. Netice olarak, $\langle y(t+\tau)y^*(t) \rangle$ ifadesi, $a_k(f_1, \dots, f_k) b_k(f_1, \dots, f_k)$ yerine $|a_k(f_1, \dots, f_k)|^2$ yazılarak (152) serisiyle elde edilmektedir. $\exp(-j\omega\tau)$ ile çarpılır ve $-\infty$ dan $+\infty$ a τ nun integrali alınırsa $y(t)$ nin güç spektrumu için, bizim notasyonumuzda, Mircea-Sinnreich [5] serisini verir:

$$\begin{aligned} W_y(f) &= |a_0|^2 \delta(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k[W_x(f)]}{k!} \delta(f - f_1 - \dots - f_k) |a_k(f_1, \dots, f_k)|^2 \\ &= |a_0|^2 \delta(f) + W_x(f) |a_1(f)|^2 + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) W_x(f - f_1) |a_2(f_1, f - f_1)|^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) W_x(f - f_1 - f_2) |a_3(f_1, f_2, f - f_1 - f_2)|^2 + \dots \quad (160) \end{aligned}$$

Burada $a_0 = \langle y(t) \rangle$ ve $k > 0$ için $a_k(f_1, \dots, f_k)$ (156) serisiyle verilmektedir. $Q_k[W_x(f)]$ operatöründeki $f, f_1, \dots, f_k$ değerlerini alır. $\delta(f - f_1 - \dots - f_k)$ daki f ile ilgisi yoktur. a_0 için seri, $\langle y(t) \rangle$ için (147) serisiyle verilmektedir. $k = 1, 2, 3$ için (156)daki ilk birkaç terim aşağıdadır.

$$\begin{aligned}
a_1(f) &= G_1(f) + \frac{1}{1!2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1' W_x(f_1') G_3(f, f_1', -f_1') + \dots \\
a_2(\rho, \sigma) &= G_2(\rho, \sigma) + \frac{1}{1!2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1' W_x(f_1') G_4(\rho, \sigma, f_1', -f_1') + \dots \\
a_3(\rho, \sigma, \lambda) &= G_2(\rho, \sigma, \lambda) + \dots \dots \dots (161)
\end{aligned}$$

$W_y(f)$ için (160)daki öncü terimler (14)de verilmiştir.

$y(t)$ karmaşık olduğunda, (70)i takiben, analizde $y(t)$ nin reel kısmının güç spektrumu, $G_n(f_1, \dots, f_n)$ ile $[G_n(f_1, \dots, f_n) + G_n^*(-f_1, \dots, -f_n)]/2$ yer değiştirilerek elde edilebilmektedir. $y(t)$ nin reel kısmının güç spektrumunu elde etmek için $W_y(f)$ için (160) serisinde $|a_k(f_1, \dots, f_k)|^2$ yerine $|a_k(f_1, \dots, f_k) - a_k^*(-f_1, \dots, -f_k)|^2/4$ yazmak için eşitliktir. Bunun gibi, $y(t)$ nin sanal kısmının güç spektrumu, $W_y(f)$ için analizde, $G_n(f_1, \dots, f_n)$ yerine $[G_n(f_1, \dots, f_n) - G_n^*(-f_1, \dots, -f_n)]/2j$ yazılarak elde edilmektedir ve (160)da $|a_k(f_1, \dots, f_k)|^2$ ile $|a_k(f_1, \dots, f_k) - a_k^*(-f_1, \dots, -f_k)|^2/4$ yer değiştirir.

C. Sinüs Dalgası Artı Gürültü Girişi İçin Güç Spektrumu

$x(t) = P \cos pt + I_N(t)$ olduğunda, $1/f_p = 2\pi/p$ periyodu ile $\langle y(t) \rangle$ averajı periyodiktir. Burada $I_N(t)$, iki taraflı $W_l(f)$ güç spektrumuna sahip bir Gauss gürültüsüdür. $\langle y(t) \rangle$ yi elde etmek için Bölüm VI-C deki gibi bir yöntem takip ediyoruz. (135) ve (141) i bir araya getirirsek aşağıdaki ifadeyi verir.

$$\left\langle \exp \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_n x(t - u_s) \right\rangle = \exp \left\{ \frac{p}{2} [e^{jpt} A_n(f_p) + e^{-jpt} A_n(-f_p)] \right\} \exp J_{nAA} \dots \dots \dots (162)$$

burada J_{nAA} , $W_x(f)$ yerine $W_l(f)$ konarak (142) ile verilmektedir. (162)nin sağ tarafı (145)in yardımıyla açılırsa aşağıdaki gibi olur.

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{P}{2} \right)^N \sum_{l=0}^N \frac{N! e^{j(2l-N)pt}}{l!(N-l)!} [A_n(f_p)]^l [A_n(-f_p)]^{N-l} \left[1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^\mu} Q_\mu [W_l(f)] \prod_{r=1}^{\mu} A_n(f_r) A_n(-f_r) \right] \dots \dots \dots (163)$$

(129)un averajını alarak elde edilen integrallerin serisinde yerine yazılıp ve toplamın seviyesi değiştirildiği zaman D_α^n operatörü, $l + (N-l) + 2\mu = N + 2\mu = n$ hariç tüm terimleri sıfır yapar. Sonuç aşağıdadır.

$$\langle y(t) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{P}{2} \right)^N \sum_{l=0}^N \frac{e^{j(2l-N)pt}}{l!(N-l)!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^\mu} Q_\mu [W_l(f)] G_{2N+\mu}(f_1, -f_1, \dots, f_\mu, -f_\mu, (f_p)_l, (-f_p)_{N-l}) \dots (164)$$

burada, $G_0 \equiv 0$ ve $(f_p)_l, f_p, f_p, \dots, f_p$ l argümanlarını göstermektedir. Eğer μ veya l veya $N-l$ sıfır olursa $G_{2N+\mu}$ de karşı gelen argümanlar görünmez. (164)te $\mu = 0$, $G_{2N+\mu}$ terimine karşı gelen $G_{2N}((f_p)_l, (-f_p)_{N-l})$, (137)nin notasyonunda $G_{l,N-l}(f_p)$ olarak aynıdır. $Q_\mu[W_l(f)]$ deki f, f_p yi değil sadece $f_1, \dots, f_\mu$ yi işaret eder. (164) ilk birkaç terimi (15)de verilmiştir.

$\langle y(t) \rangle$ deki $\exp(jnpt)$ bileşeni aşağıdadır.

$$e^{jnpt} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\frac{P}{2}\right)^{2\sigma+|n|} \frac{1}{\sigma!(\sigma+|n|)!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^\mu} Q_\mu[W_l(f)] \cdot G_{2\sigma+|n|+2\mu}(f_1, -f_1, \dots, f_\mu, -f_\mu, (f_p s_n)_{\sigma+|n|}, (-f_p s_n)_\sigma) \dots (165)$$

burada, $n \geq 0$ için $s_n = 1$ ve $n < 0$ için $s_n = -1$ dir. P sıfır olduğunda (165), (147) haline gelir ve $W_l(f)$ sıfır olduğunda, $N = |n|$ ile (165), (138) haline gelir.

Bölüm VII-A da $z(t)$ de olduğu gibi şimdi $\langle y(t+\tau)z(t) \rangle$ yi elde ediyoruz. $x(t) = P \cos pt + I_N(t)$ için

$$\left\langle \exp \left[\sum_{s=1}^n \alpha_s x(t+\tau-u_s) + \sum_{s=1}^m \beta_s x(t-v_s) \right] \right\rangle \dots (166)$$

$= \exp \left[\frac{P}{2} \left\{ e^{jpt} [A_n(f_p) + B_m(f_p)] + e^{-jpt} [A_n(-f_p) + B_m(-f_p)] \right\} \exp(J_{nAA} + J_{mBB} + J_{nmAB}) \right]$
burada, (150) integralinde $W_x(f)$ yerine $W_l(f)$ konarak tanımlanmakta ve $A_n(f)$ ile $B_m(f)$ (149)dakiyle aynıdır. İlk terimin katkısı i.e. teklik, J_{nmAB} nin açılımında [gör(151)], $\langle y(t+\tau)z(t) \rangle$ için duble serinin değeri için $[y(t+\tau)$ ve $z(t)$ için (129) serisinin yapısını averaj ile ve (166) kulaalınılarak elde edilen]n-toplam ve m-toplamın yapılarına ayrılabilir. Bölüm VII-A da olduğu gibi bu katkı, averajı (164)ten elde edilebilen $\langle y(t+\tau) \rangle \langle z(t) \rangle$ dir.

$\exp(J_{nmAB})$ nin açılımında değişmeyen terimlerin katkısını elde etmek için aşağıdaki gibi (166)da sağdaki ilk üssü açarız..

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{P}{2}\right)^N \sum_{l=0}^N \frac{N!}{l!(N-l)!} e^{j(2l-N)pt} \sum_{\lambda=0}^l \sum_{\sigma=0}^{N-l} \frac{l!(N-l)!}{\lambda!(l-\lambda)!\sigma!(N-l-\sigma)!} e^{j(\lambda-\sigma)p\tau} A_n^\lambda(f_p) B_m^{l-\lambda}(f_p) A_n^\sigma(-f_p) B_m^{N-l-\sigma}(-f_p) \dots (167)$$

bu da aşağıdaki ifadeye götürür.

$$\langle y(t+\tau)z(t) \rangle = \langle y(t+\tau) \rangle \langle z(t) \rangle + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{P}{2}\right)^N \sum_{l=0}^N e^{j(2l-N)pt} \sum_{\lambda=0}^l \sum_{\sigma=0}^{N-l} \frac{e^{j(\lambda-\sigma)p\tau}}{\lambda!(l-\lambda)!\sigma!(N-l-\sigma)!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k[W_l(f)] e^{j(w_1+\dots+w_k)\tau}}{k!} a_{\lambda,\sigma,k}(f_1, f_2, \dots, f_k; f_p) b_{l-\lambda, N-l-\sigma, k}(f_1, f_2, \dots, f_k; f_p) \dots (168)$$

$$a_{\lambda,\sigma,k}(f_1, f_2, \dots, f_k; f_p) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v! 2^v} Q_v[W_l(f')] G_{\lambda+\sigma+k+2v}(f'_1, -f'_1, \dots, f'_v, -f'_v, f_1, \dots, f_k, (f_p)_\lambda, (-f_p)_\sigma). \quad (169)$$

ve $b_{\lambda,\sigma,k}(f_1, \dots, f_k; f_p)$, (169)un sağ tarafında G yerine G' ve $f_1, \dots, f_k$ yerine $-f_1, \dots, -f_k$ yazılarak elde edilmektedir.

$y(t)$ nin güç spektrumu aşağıda verilmiştir.

$$W_y(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(pt) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-j\omega\tau} \langle y(t+\tau)y^*(t) \rangle \quad \dots\dots\dots(170)$$

burada ortalama, $z(t) = y^*(t)$ ile (168)de verilmiştir. a lar (169) ile tanımlanmıştır ve mademki $G'_n(f_1, \dots, f_n) = G_n^*(-f_1, \dots, -f_n)$,

$$\begin{aligned} b_{\lambda,\sigma,k}(f_1, \dots, f_k; f_p) &= a_{\lambda,\sigma,k}^*(f_1, \dots, f_k; -f_p) \\ &= a_{\lambda,\sigma,k}^*(f_1, \dots, f_k; f_p) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(171)$$

Modifiye edilmiş (168) ortalama (170) de yerine konduğunda (pt) ye göre integral, $2l = N$ hariç N ve l ye göre toplamda tüm terimleri çıkarır ve τ ya göre integral, $\delta(-f_1 - f_2 \dots - f_k - \lambda f_p + \sigma f_p)$ alır.(ithal eder)

Ayrıca, $\langle y(t) \rangle$ için (164) ifadesi aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$\langle y(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(jnpt) \quad \dots\dots\dots(172)$$

(170)in sağ tarafı için $\langle y(t+\tau) \rangle \langle y^*(t) \rangle$ yapısının katkısı sonsuz piklerin serisidir.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_p) \quad \dots\dots\dots(173)$$

Bu sonuçları bir araya getirirsek aşağıdakini elde ederiz.

$$\begin{aligned} W_y(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_p) + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{P}{2}\right)^{2l} \sum_{\lambda=0}^l \sum_{\sigma=0}^l \frac{1}{\lambda!(l-\lambda)!\sigma!(l-\sigma)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_k[W_l(f)] \\ &\delta(f - f_1 \dots - f_k - \lambda f_p + \sigma f_p) a_{\lambda,\sigma,k}(f_1, f_2, \dots, f_k; f_p) a_{l-\sigma, l-\lambda, k}^*(f_1, f_2, \dots, f_k; f_p) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(174)$$

Dört katlı toplamda toplamın seviyesini değiştirmek ta ki k -toplam sol taraftır ve sabit bir n sayısına eşit olan $\lambda - \sigma$ için l, λ, σ -toplamdaki terimler göz önüne alınırsa aşağıdaki istenen ifadeye götürür.

$$W_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_k [W_l(f)] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_1 - f_2 - \dots - f_k - nf_p) \cdot \left| \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\frac{P}{2} \right)^{2\sigma+|n|} \frac{1}{\sigma!(\sigma+|n|)!} a_{\sigma+|n|,\sigma,k} (f_1, \dots, f_k; f_p s_n) \right|^2 \dots\dots\dots(175)$$

burada, c_n , (172) ve (165) ile $a_{\lambda,\sigma,k}(\dots)$ da (169) ile verilmiştir. $n \geq 0$ olduğunda $f_p s_n = f_p$ ve $n < 0$ olduğunda $f_p s_n = -f_p$ dir. P sıfır olduğunda $x(t)$ Gauss tipi için (175), (160)a sadeleşir. (160)da olduğu gibi $Q_k [W_l(f)]$ daki f sadece $f_1, f_2, \dots, f_k$ değerlerini alır ve $\delta(f - f_1 - f_2 - \dots - f_k - nf_p)$ ifadesinde görünen f veya f_p ile ilişkili değildir. Yine (160) olduğu gibi delta fonksiyonunun etkisi, $k > 0$ olduğunda $Q_k [W_l(f)]$ operatörüyle gösterilen k integrallerini “tüketmek”dir. $Q_0 [W_l(f)] \equiv 1$ ve (165)in $c_n \exp(jnpt)$ ye eşit olduğunu göz önüne alırsak görürüz ki $|c_n|^2 \delta(f - nf_p)$ nin toplamı $k = 0$ terimi olarak kabul edilebilir ve (175), $k = 0$ dan $k = \infty$ a toplam olarak yazılabilmektedir. (175)in ilk birkaç terimi (16)da verilmiştir.

VIII. DAHA YÜKSEK MOMENT ve YOĞUNLUK İHTİMALİ

$x(t)$ Gauss tipi olduğunda $y(t)$ için ilk dört kümülanntaki öncü terimler, Bölüm VIII-A da türetilmiştir. Bölüm VIII-B de, bu kümülanntların $y(t)$ nin yoğunluk ihtimali hakkında bilgi elde etmek için nasıl kullanılabilecekleri göstermek için formüller verilmektedir. Bir Volterra serisinde ikinci terimden sonrası olmadığı zaman, $y(t)$ nin yoğunluk ihtimali, belli parametreleri içeren bir integral olarak ifade edilebilmektedir. Parametrelerin değerleri, bir integral eşitliğini çözerek elde edilebilmektedir. Bölüm VIII-C de integral eşitliklerinin değişik formları listelenmiş ve kümülanntların hesaplanma metotları tartışılmıştır.

A. Kümülanntlar

Bu bölümde $x(t)$, iki taraflı $W_x(f)$ güç spektrumuyla reel bir sıfır-mana durağan Gauss işlemi olarak alınmaktadır. g_n kerneli reel olarak kabul edildi şöyle ki $y(t)$ reel ve $G_n(-f_1, \dots, -f_n)$, $G_n^*(f_1, \dots, f_n)$ ye eşittir. Madem ki $x(t)$ durağandır o halde $y(t)$ nin momentlerini veren averajlar t ye bağlı değildir.

$\langle y(t) \rangle$ için (11) serisinde $y(t)$ ve $G_{2\mu}$ yerine $[y(t)]^l$ ve $G_{2\mu}^{(l)}$ yazılırsa, $y(t)$ nin l.inci momenti için bir seri verir.

$$\langle [y(t)]^l \rangle = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu! 2^\mu} Q_\mu [W_x(f)] G_{2\mu}^{(l)} (f_1, -f_1, \dots, f_\mu, -f_\mu) \dots\dots\dots(176)$$

burada, $G_{2\mu}^{(l)}$, (24) ile G_n in terimlerinde verilmektedir.(176)da (24) yerine konarak elde edilen seri, en çok arzulanan değildir çünkü G_n in simetrisi $W_x(-f) = W_x(f)$ ile kullanılarak ve integralin değişkenlerinin işaretleri değiştirilerek kolaylaştırılabilmektedir. Maalesef, kolaylaştırma için genel bir yöntem bilinmemektedir.Bununla birlikte, ($l=1$ için (176) sadeleşmiş formudur) $l=2$ için sadeleşmiş form, $\langle y(t+\tau)z(t) \rangle$ için (158) serisinde $\tau=0$ ve $z(t)=y(t)$ alınarak elde edilebilmektedir:

$$\langle y^2(t) \rangle = \langle y(t) \rangle^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k [W_x(f)]}{k!} a_k(f_1, \dots, f_k) a_k(-f_1, \dots, -f_k) \quad \dots\dots\dots(177)$$

(177)deki öncü terimler $\kappa_2 = \langle y^2(t) \rangle - \langle y(t) \rangle^2$ için (180) de gösterilmektedir.

Takip eden çalışmada $y(t)$ nin κ_n kümülanlarıyla α_n momentlerinden daha fazla ilgilenebiliriz. Kümülanlar daha basit ve Bölüm VIII-B de verilen $y(t)$ nin dağılımında direkt görünürler.[23,p.186] ile momentle ilgili ilk dört kümülan:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \alpha_1 \\ \kappa_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 \\ \kappa_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \\ \kappa_4 &= \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(178)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n / n!$ olan (22) hafızasız durumu, genel durum için kullanışlı bir rehberdir.[a_n katsayısının (177)deki $a_k(f_1, \dots, f_k)$ ile ilgisi yoktur.] Burada x , 0 ortalama ve σ^2 varyansı ile rasgele normal bir değişkendir. $n=1,3,\dots$ tek olduğunda x in n .inci momenti 0 ve n çift olduğunda $(n-1)\sigma^n$ dir. Önce momentler halledildikten sonra (178)de yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{2} a_2 \sigma^2 + \frac{1}{2!2^2} a_4 \sigma^4 + \frac{1}{3!2^3} a_6 \sigma^6 + \dots \\ \kappa_2 &= a_1^2 \sigma^2 + \left(a_1 a_3 + \frac{1}{2} a_2^2 \right) \sigma^4 + \left(\frac{1}{4} a_1 a_5 + \frac{1}{2} a_2 a_4 + \frac{5}{12} a_3^2 \right) \sigma^6 + \dots \\ \kappa_3 &= 3a_1^2 a_2 \sigma^4 + \left(\frac{3}{2} a_1^2 a_4 + 6a_1 a_2 a_3 + a_2^3 \right) \sigma^6 + \dots \quad \dots\dots\dots(179) \\ \kappa_4 &= (4a_1^3 a_3 + 12a_1^2 a_2^2) \sigma^6 + (2a_1^3 a_5 + 18a_1^2 a_2 a_4 + 36a_1 a_2^2 a_3 + 12a_1^2 a_3^2 + 3a_2^4) \sigma^8 + \dots \end{aligned}$$

$y(t)$, hafızasız güç serisi yerine (1)le verilen genel Volterra serisi olduğunda,(179)a karşı gelen eşitlikteki öncü terimler benzer bir yöntemle elde edilebilmektedir. $l=1$ ile κ_1 için sonuç (176) ile verilmektedir.i.e.(147). $\kappa_2 = \langle y^2(t) \rangle - \langle y(t) \rangle^2$ için sonuç (177) ile verilmektedir. κ_3 ve κ_4 için sonuçlar daha fazla çalışma ve (178)in kullanımını

gerektirmektedir. Yer kazanmak amacıyla aşağıdaki listede $W_x(f)df$ ve $G_3(f_1, f_2, f_3)$ yerine kısaca (W) ve $(1, 2, 3)$ vb. yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 W_x(f_1) G_2(f_1, -f_1) + \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) G_4(f_1, f_2, -f_1, -f_2) + \dots \\
&= \frac{1}{2} \int (W)(1, -1) + \frac{1}{8} \iint (WW)(1, 2, -1, -2) + \dots \\
\kappa_2 &= \int (W)(1)(-1) + \iint (WW) \left[(1)(-1, 2, -2) + \frac{1}{2} (1, 2)(-1, -2) \right] \\
&\quad + \iiint (WWW) \left[\frac{1}{4} (1)(-1, 2, -2, 3, -3) + \frac{1}{2} (1, 2)(-1, -2, 3, -3) + \frac{1}{4} (1, 2, -2)(-1, 3, -3) + \frac{1}{6} (1, 2, 3)(-1, -2, -3) \right] + \dots \\
\kappa_3 &= \iint (WW) 3(1)(2)(-1, -2) \\
&\quad + \iiint (WWW) \left[\frac{3}{2} (1)(2)(-1, -2, 3, -3) + 3(1)(-1, 2)(-2, 3, -3) + 3(1)(2, 3)(-1, -2, -3) + (1, 2)(-1, 3)(-2, -3) \right] + \dots \\
\kappa_4 &= \iiint (WWW) [4(1)(2)(3)(-1, -2, -3) + 12(1)(2)(-1, 3)(-2, -3)] \\
&\quad + \iiint \int (WWWW) [2(1)(2)(3)(-1, -2, -3, 4, -4) + \{6(1)(2)(3, 4)(-1, -2, -3, -4) + 12(1)(2)(-1, 3)(-2, -3, 4, -4)\} \\
&\quad + \{12(1)(-1, 2)(-2, 3)(-3, 4, -4) + 12(1)(2, -3)(3, 4)(-1, -2, -4) + 12(1)(-1, 2)(3, 4)(-2, -3, -4)\} \\
&\quad + \{6(1)(2)(-1, -2, 3)(-3, 4, -4) + 3(1)(2)(-1, 3, 4)(-2, -3, -4) + 3(1)(2)(-1, 3, -3)(-2, 4, -4)\} \\
&\quad + 3(1, 2)(-1, 3)(-2, 4)(-3, -4)] + \dots \dots \dots (180)
\end{aligned}$$

Zorluğundan dolayı κ_4 de dört katlı integralin doğru türetilmesi bitirilememiştir. (180) de verilen ifade, sadece κ_1 de görünen, $\langle y^l(t) \rangle$ de yapı ve integrallerine ayrılamayan terimler varsayımı üzerine oturtulmuştur. Eski metotla elde edilen (180) deki terimler ve hafızasız durum (179) sonuçlarını sağladığı gerçekleriyle varsayım desteklenmiştir.

Eğer varsayım doğru ise (176) ve (24) ü takip eder ki κ_l için olan seride μ -katlı integraldeki G lerin yapıları, 2μ nün parçalarının l -kısımına karşılık gelir. Örnek olarak κ_3 de 2-katlı integraldeki $(1)(2)(-1, -2)$ yapısını göz önüne alalım. Burada $\mu = 2$ ve $l = 3$ ve yapı, $2\mu = 4$ ün $1+1+2$ parçasının 3-kısımına karşılık gelir. Bu yapı sadece κ_3 de 2-katlı integralde görünür. κ_1 ve κ_2 deki 2-katlı integrallerde görünmez.

B. Yaklaşık Yoğunluk İhtimali

Bu bölümde κ_n kümülanından $y(t)$ nin $p(y)$ yoğunluk ihtimali hakkında bilgi edinme metoduna yeniden göz atıyoruz.

$y(t)$ nin ortalama ve varyansı sırasıyla κ_1 ve κ_2 dir. “eğrilik” ve “fazlalık” ın γ_1 ve γ_2 katsayıları, $p(y)$ nin eğrilik ve yüksekliğini karşılaştırmak için istatistikçiler tarafından kullanılmıştır. Normal bir eğriye sahip ve aynı ortalama ve varyans,

$$\gamma_1 = \kappa_3 / \kappa_2^{3/2} \quad \gamma_2 = \kappa_4 / \kappa_2^2 \quad \dots\dots\dots(181)$$

Teorik incelemeden $p(y)$ nin merkez kısmının biçimi yaklaşık olarak bilindiğinde, bazı uygun eğriler tahsis etmek için, (ilk dört kümülanıdan elde edilen) ilk dört momenti kullanmak mümkün olabilir. Örneğin Pearson –tipi bir eğri.

$p(y)$ nin merkez kısmı normal olarak bilindiğinde, normalden sapma, Edgeworth-tipi seriyle gösterilmektedir. [23. pp.221-232]

$$p(y) = \kappa_2^{-1/2} \left\{ Z(u) - \left[\frac{1}{6} \gamma_1 Z^{(3)}(u) \right] + \left[\frac{1}{24} \gamma_2 Z^{(4)}(u) + \frac{1}{72} \gamma_1^2 Z^{(6)}(u) \right] + \dots \right\} \quad \dots\dots\dots(182)$$

burada, $u = (y(t) - \kappa_1) / \kappa_2^{1/2}$ ve,

$$Z(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2), \quad Z^{(k)}(u) = (d/du)^k Z(u) \quad \dots\dots\dots(183)$$

$Z^{(k)}(u)$ fonksiyonları, [18, Tablo 26.1, pp.966-973]de tabloda düzenlenmiştir.

(182) alındığında $p(y)$, $y = y_0$ da pikine sahiptir. Burada,

$$y_0 \approx \kappa_1 - \frac{1}{2} \gamma_1 \kappa_2^{1/2} \\ p(y_0) \approx (2\pi\kappa_2)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{8} \gamma_2 - \frac{1}{12} \gamma_1^2 \right) \quad \dots\dots\dots(184)$$

C. İki-Terim Volterra Serisinin Yoğunluk Olasılığı

İki-terim serinin $p(y)$ yoğunluk ihtimali için bir ifade aşağıdadır.

$$y(t) = \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 g_1(u_1) x(t-u_1) + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 g_2(u_1, u_2) x(t-u_1) x(t-u_2) \quad \dots\dots\dots(185)$$

Bu ifade, $[W_x(f)]$ güç spektrumu ve $R_x(\tau)$ otokorelasyon fonksiyonu ile $x(t)$ Gauss tipinde olduğunda, [24]e geri dönen bir metotla elde edilebilmektedir. Problem tümüyle yalnız ikinci terimin dağılımını elde etmeyle ilişkilidir ve buradan da normal değişikliklerin kuadratik formlarıyla ilişkilidir. Bu tipin problemleri bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. [17],[21],[24]-[26]. Burada, bu çalışmalar üzerine oturtulmuş $p(y)$ yi hesaplamak için bir metot veriyoruz. Tüm integraller aksi belirtilmediği sürece $-\infty$ dan $+\infty$ a dır ve $\sum_n$ toplamı da bir integral eşitliğinin tüm eigendurumları üzerindeki toplamı göstermektedir.

TABLO II
 λ_n ve ξ_n yi DÜZENLEMEK İÇİN İNTEGRAL EŞİTLİKLERİ

$\lambda F(x) = \int k(x,y)F(y)dy$				
No	$F(t)$ veya $F(f)$	$k(t,u)$ veya $k(f,f_1)$	Ortonormalizasyon	ξ_n
1	$\varphi(t)$	$\iint dv_1 dv_2 g_2(v_1, v_2) a(t-v_1) a(u-v_2)$	$\delta_{mn} = \int dt \varphi_m(t) \varphi_n(t)$	$\iint dudv g_1(u) a(v-u) \varphi_n(v)$
2	$\Phi(f)$	$A(f)A(-f_1)G_2(f, -f_1)$	$\delta_{mn} = \int df \Phi_m(f) \Phi_n(-f)$	$\int df G_1(f) A(f) \Phi_n(-f)$
3	$\psi(t)$	$\int dv R_x(t-v) g_2(v, u)$	$\lambda_n \delta_{mn} = \iint dudv g_2(u, v) \psi_m(u) \psi_n(v)$	$\int dudv g_1(u) \psi_n(u)$
4	$\Psi(f)$	$W_x(f)G_2(f, -f_1)$	$\delta_{mn} = \int df \Psi_m(f) \Psi_n(-f) / W_x(f)$	$\int df G_1(f) \Psi_n(-f)$
5	$\chi(t)$	$\int dv g_2(t, v) R_x(v-u)$	$\lambda_n^2 \delta_{mn} = \iint dudv R_x(u-v) \chi_m(u) \chi_n(v)$	$\iint dudv g_1(u) R_x(u-v) \chi_n(v) / \lambda_n$
6	$X(f)$	$W_x(f_1)G_2(f, -f_1)$	$\lambda_n^2 \delta_{mn} = \int df W_x(f) X_m(f) X_n(-f)$	$\int df G_1(f) W_x(f) X_n(-f) / \lambda_n$
$\psi_n(t) = \int du a(u-t) \varphi_n(u)$ $\Psi_n(f) = A(-f) \Phi_n(f)$ $R_x(t-u) = \int dv a(t-v) a(u-v)$ $W_x(f) = A(f) ^2$ $\chi_n(t) = \int dudv g_2(t, u) \psi_n(u)$ $X_n(f) = \int df G_2(f, -f_1) \Psi_n(f_1)$ $R_x(t-u) = \sum_n \psi_n(t) \psi_n(u)$ $W_x(f) \delta(f-f_1) = \sum_n \Psi_n(f) \Psi_n(-f_1)$ $\lambda_n \psi_n(t) = \int du R_x(t-u) \chi_n(u)$ $\lambda_n \Psi_n(f) = W_x(f) X_n(f)$ $g_2(u, v) = \sum_n \lambda_n^{-1} \chi_n(u) \chi_n(v)$ $G_2(f_1, f_2) = \sum_n \lambda_n^{-1} X_n(f_1) X_n(f_2)$ $\lambda_n \delta_{mn} = \int dt \psi_m(t) \chi_n(t)$ $\lambda_n \delta_{mn} = \int df \Psi_m(f) X_n(-f)$ $\iint dv dw g_2(v, w) a(t-v) a(u-w)$ $A(f_1) A(f_2) G_2(f_1, f_2)$ $= \sum_n \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(u)$ $= \sum_n \lambda_n \Phi_n(f_1) \Phi_n(f_2)$				

Not: $a(t), \varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ nin Fouier dönüşümleri $A(f), \Phi(f), \Psi(f), X(f)$ dir; $|A(f)|^2 = W_x(f)$, $A(-f) = A^*(f)$

İlk problem λ_n eigendeğerlerinin bir kümesini ve ξ_n çokluğunu hesaplamaktır. Bunlar bilindiğinde $p(y)$ aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jyz} Q(z) dz$$

$$Q(z) = \frac{1}{\prod_n (1 - j\lambda_n z)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\sum_n \frac{\xi_n^2 z^2}{2(1 - j\lambda_n z)} \right] \dots\dots\dots(186)$$

burada, λ_n ve ξ_n reel ve $z=0$ da $\arg(1-j\lambda_n z)^{\frac{1}{2}} = 0$ dır. Genelde $p(y)$ integralini değerini bulmak için tek pratik yol sayısal integraldir. Tüm λ_n ler pozitif olduğunda, integralin yolunu yukarı $\text{Im} z = \infty$ kaydırma gösterir ki $-\sum_n \xi_n^2 / 2\lambda_n$ den küçük y için $p(y)$ sıfırdır, serinin yakınsak olmasını sağlar.

λ_n ve ξ_n parametreleri, Tablo-II de listelenen altı integral eşitliğinin [$g_2(u_1, u_2)$, $R_x(\tau)$ ve bunların Fourier dönüşümleri, $G_2(f_1, f_2)$, $W_x(f)$ ye göre] en uygun olanını çözerek elde edilmektedir. Bu eşitlikler aşağıdaki ifadenin formlarıdır.

$$\lambda F(x) = \int k(x, y) F(y) dy \quad \dots\dots\dots(187)$$

Kerneller, “ $k(t, u)$ veya $k(f, f_1)$ ” etiketli sütunda ve eigen fonksiyonları da “ $F(t)$ veya $F(f)$ ” etiketli sütunda listelenmiştir. İntegral eşitliğinin çözümü λ_n yi ve eigen fonksiyonlarını verir. Sonradan ξ_n , “ ξ_n ” etiketli sütunda listelenen integrallerden karşı gelen integralin değeri hesaplanarak elde edilmektedir. Eğer çözüm için Tablo-II de 1 veya 2 integralleri seçildiyse, $\arg A(f)$ nin seçiminde biraz bağısız kalınır maden ki $A(f)$, sadece $|A(f)|^2 = W(f)$ ile kısıtlanmakta ve $\arg A(-f) = -\arg A(f)$. ($a(t)$, $A(f)$ nin Fourier dönüşümüdür.)

Tüm λ_n eigen değerleri reeldir çünkü tablonun 1. inci satırında gösterilen kernel, t ve u nun simetrik bir fonksiyonudur.

Öncelikle $x(t)$ yi $\langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \delta(\tau)$ ile beyaz gürültü olarak alarak ve ensemblenin tipik bir $x(t+u)$ elemanının $\sum_n c_n(t) \phi_n(u)$ olarak açılmasıyla Tablo-II yapılabilir. Burada $\phi_n(u)$ lar bir as-yet-unspecified ortomormal kümedir. t yerleştirilmiş ensemblenin elemanından elemanına gittiğimiz sürece $c_n(t)$, birim varyans ve sıfır-mana ile normal rasgele değişkenler gibi davranır. Bu aşamada $\phi_n(u)$, $g_2(t, u)$ kerneline sahip bir integral eşitliğinin n. inci eigen fonksiyonu olarak seçilmektedir. İntegral eşitliğini, $x(t)$ nin $W_x(f)$ genel güç spektrumuna sahip olduğu hale çevirme, $A(f)$ yi kazandırır ve Tablo-II de 1 e götürür. $\arg A(f)$ ile ilgili keyfilik, $\psi_n(t)$ tanımlanarak ortadan kaldırılabilir. $\psi_n(t)$ ve $\chi(t)$ eigen fonksiyonları aslında aynı yönde ilgilidir şöyle ki bir Rg matris yapısının n. inci modal sütunu $\psi_n(t)$ ve m. inci modal satırı $\chi(t)$ dir. Burada, R ve g simetrik kare matrislerdir.

$$[(l\lambda_n - Rg)\psi_n = 0, \chi(t)(l\lambda_m - Rg) = 0, l = \text{birim matris}]$$

$\phi(t)$, $\psi_n(t)$, $\chi(t)$ için üç integral eşitliğine karşı gelme, bunların $\Phi(f)$, $\Psi(f)$, $X(f)$ Fourier dönüşümleri için üç daha karşı gelmez.

$p(y)$ yoğunluk olasılığı için kümülanlar, $Q(z)$ karakteristik fonksiyonunun güç serisi açılımındaki katsayılarla orantılıdır. $Q(z)$ için (186) ve Tablo-II den aşağıdakiler bulunur.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n = \frac{1}{2} \int df W_x(f) G_2(f, -f) \\ \kappa_2 &= \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{1}{2} \lambda_n^2 + \xi_n^2 \right) = \frac{1}{2} \int df W_x(f) G_2^{(2)}(f, -f) + \int df W_x(f) G_1(f) G_1(-f) \\ \kappa_m &= \sum_n \left[\frac{(m-1)!}{2} \lambda_n^m + \frac{m!}{2} \xi_n^2 \lambda_n^{m-2} \right] \quad \dots\dots\dots(188) \end{aligned}$$

$$= \frac{(m-1)!}{2} \int df W_x(f) G_2^{(m)}(f, -f) + \frac{m!}{2} \iint df_1 df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) G_1(f_1) G_1(f_2) G_2^{(m-2)}(-f_1, -f_2)$$

$G_2^{(m)}(f_1, f_2)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} G_2^{(1)}(f_1, f_2) &= G_2(f_1, f_2) \\ G_2^{(k)}(f_1, f_2) &= \int df W_x(f) G_2^{(k-1)}(f_1, f) G_2(-f, f_2), \quad k > 1. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(189)$$

$G_2(f_1, f_2)$ nin seri için Tablo-II de ortonormal ilişki 6 nın adım adım uygulanırsa aşağıdaki ifadeyi verir.

$$G^{(k)}(f_1, f_2) = \sum_n \lambda_n^{(k-2)} X_n(f_1) X_n(f_2) \quad \dots\dots\dots(190)$$

(188)de kullanılan $\lambda_n^{(k)}$ nın toplamı elde edilebilmektedir.

$n > 2$ için $G_n(f_1, \dots, f_n)$ sıfır olduğunda (188) ile verilen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ değerleri, (180) elde edilenle uygundur.