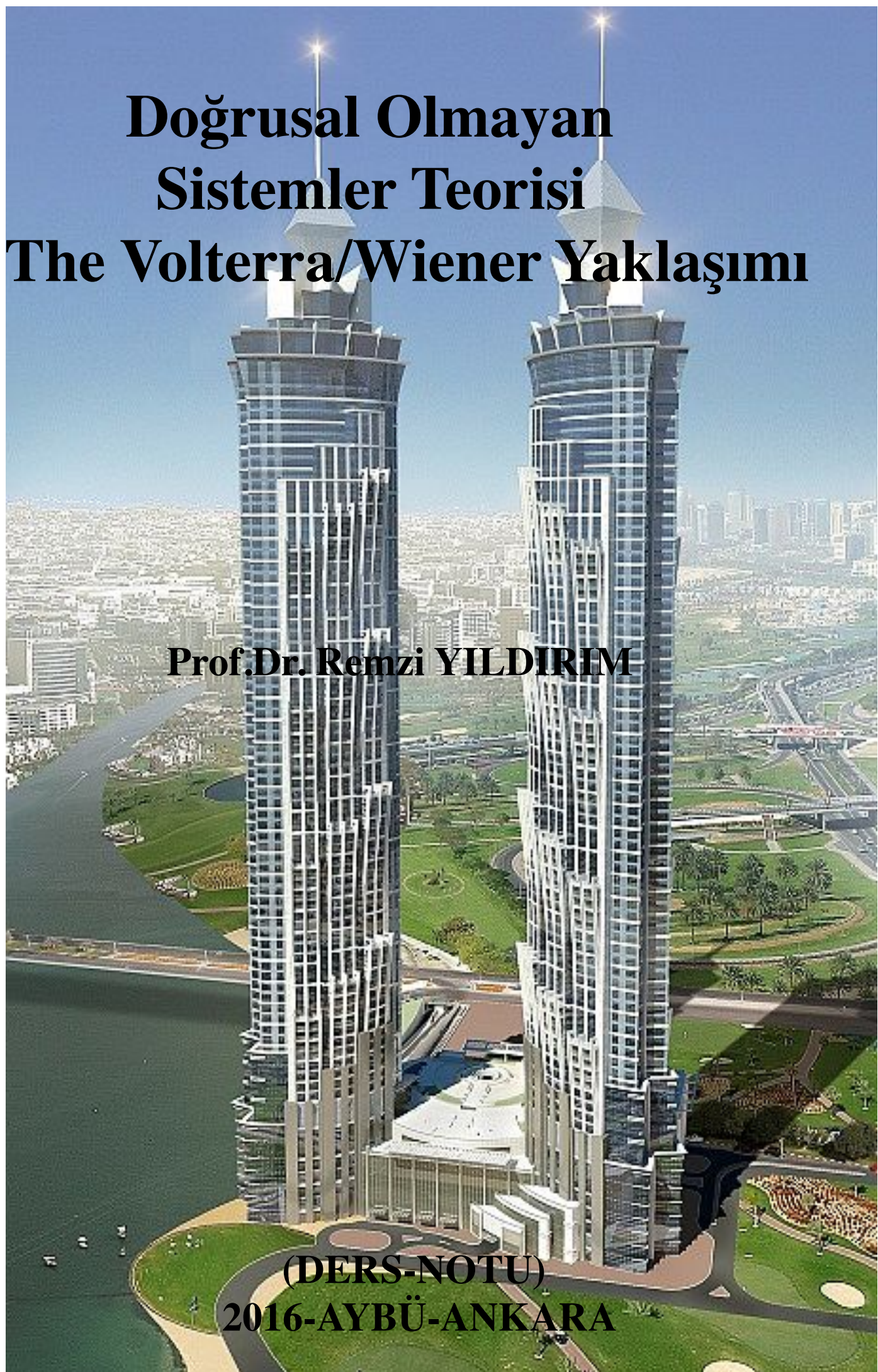




Doğrusal Olmayan Sistemler Teorisi The Volterra/Wiener Yaklaşımı

Prof.Dr. Remzi YILDIRIM

**(DERS-NOTU)
2016-AYBÜ-ANKARA**

Doğrusal Olmayan Sistemler Teorisi

The Volterra/Wiener Yaklaşımı

(DERS NOTU)

Prof. Dr.Remzi YILDIRIM

2002-GAZİ-ANKARA

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1 Giriş/Çıkışın Zaman Düzleminde Gösterimi

- 1.1 Doğrusal Sistemler
- 1.2 Benzer Doğrusal Olmayan Sistemler
- 1.3 Çok terimli Volterra Sistemleri
- 1.4 Doğrusal Olmayan Sistemler Bağıntısı
- 1.5 Sezgisel ve Matematiksel Görüş
- 1.6 Uyarılar ve Kaynaklar
- 1.7 Problemler

Ek 1.1 Volterra Sistemleri Bağıntısı için yaklaşma koşulları

Ek 1.2 Fonksiyonlar için Volterra Bağıntısı

BÖLÜM 2 Giriş/Çıkışın (Frekans Düzleminde) Dönüşüm Alanında Gösterimi

- 2.1 Laplace Dönüşümü
- 2.2 Benzer Sistemlerde Laplace Dönüşümlerinin Gösterimi
- 2.3 Yanıt Hesabı ve Birleştirilmiş Değişim
- 2.4 Hızla Büyüyen (Exponensiyel) Yaklaşım
- 2.5 Çok terimli Volterra Sistemleri
- 2.6 Uyarılar ve Kaynaklar
- 2.7 Problemler

BÖLÜM 3 Farklı Denklem Tanımlamalarından Elde Edilen Giriş/Çıkış Sembolleri

- 3.1 Giriş
- 3.2 İşaretleme
- 3.3 Carleman Doğrusallaştırma Yaklaşımı
- 3.4 Değişken Denklem Yaklaşımı
- 3.5 Hızla büyüyen (Exponensiyel) Yaklaşım
- 3.6 N^{th} - Dereceden Differansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler
- 3.7 Uyarılar ve Kaynaklar
- 3.8 Problemler

Ek 3.1 Volterra Dizeleriyle Doğrusal ve Analitik Denklemlerin Sembolik Yaklaşımı

BÖLÜM 4 Gerçekleştirme Teorisi

- 4.1 Doğrusal Gerçekleştirim Teorisi
- 4.2 Benzer Hareketsiz Sistemlerin Gerçekleştirilmesi
- 4.3 Çok terimli Hareketsiz Volterra Sistemlerinin Gerçekleştirilmesi
- 4.4 Doğrusal Denklemlerin Özellikleri
- 4.5 Hareketlilik Durumu
- 4.6 Uyarılar ve Kaynaklar
- 4.7 Problemler

Ek 4.1 Düzenli Aktarma Fonksiyonu için Bağlantı Kuralları

BÖLÜM 5 Hareketsiz Sistemlerin Özellikleri

- 5.1 Giriş Dürtüsü
- 5.2 Sinüsoidal Girişler
- 5.3 Multi-Tone Girişler
- 5.4 Rastgele Girişler
- 5.5 Wiener Teorisinin Dikey (Ortogonal) Gösterimi
- 5.6 Uyarılar ve Kaynaklar
- 5.7 Problemler

BÖLÜM 6 Farklı-Zaman Sistemleri

- 6.1 Giriş/Çıkışın Zaman Düzleminde Gösterimi
- 6.2 Giriş/Çıkışın Dönüşüm Alanında Gösterimi
- 6.3 Denklemlerden Elde Edilen Giriş/Çıkış Sembolleri
- 6.4 Sonlu Değerleri Gerçekleştirme Teorisi
- 6.5 Farklı-Zaman Sistemlerinin Karakteristik Yanıtı
- 6.6 Doğrusal Giriş/Çıkış Sistemleri
- 6.7 İki Boyutlu Doğrusal Sistemler
- 6.8 Uyarılar ve Kaynaklar
- 6.9 Problemler

BÖLÜM 7 Tanıtım

- 7.1 Giriş
- 7.2 Tanım: Giriş Dürtüsünün Kullanımı
- 7.3 Tanım: Hazır Durum Frekansı Cevabı
- 7.4 Tanım: Gauss Parazit Girişinin Kullanımı
- 7.5 Wiener Çekirdeklerinin Dikey (Orthogonal) Gelişimi
- 7.6 Uyarılar ve Kaynaklar
- 7.7 Problemler

ÖNSÖZ

Bir doğrusal olmayan sistem mühendisliği problemi ile karşı karşıya kaldığımızda, ilk yaklaşım genellikle doğrusallaştırmaktır. Başka bir deyişle; sorunun doğrusal olmayan yönlerini yapmaktan kaçınmaktır. Gerçekten uygun bir çözüm bu şekilde elde edilir. Sorun giderilmediği zaman eğilim tamamen bu durumu önlemek için çalışmaktır. Bu şekilde ilerleyen mühendisler genellikle mantıksız olarak gözükür. Doğrusal olmayan sistem mühendisliği genellikle zor ve kafa karıştırıcı olarak bilinir. Bu konu üzerinde uzun süredir çalışanlar bu konuyu genellikle tehlikeli olarak görürler.

Bu şüphecilik bir ölçüde haklıdır. Doğrusal sistem teorisi mevcut olan tekniklerin çeşitliliği ile karşılaştırıldığında, doğrusal olmayan sistemlerin tasarımı ve analizi için kullanılan araçlar bir takım özel kategoriler ile sınırlıdır. İlk olarak doğasında şekilci ve sınırlı olan faz-düzlem analizi gibi nispeten basit teknikler vardır. Sonra diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz teorisi, ve operatör teorisi gibi oldukça çözümü zor ve genel teknikler vardır. Bu bir dil, bir çerçeve ve varolan/eşsiz deliller ama genellikle bu temellerin ötesinde küçük bir problem veya özel bilgiler sağlar. Son olarak ise bilgisayarlar üzerindeki bir simülasyon olarak adlandırılabilir.

Bu teknikler veya yaklaşımların yararsız olduğunu söylemiyorum. Faz-düzlem analizi, sınır döngüleri ve ikinci dereceden sistemlerin birden fazla dengelerini içeren doğrusal olmayan olayları anlatmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisi doğrusal olmayan sistemlerin bazı sınıfları için oldukça gelişmiş bir istikrar teorisine yol açmıştır. Fonksiyonel analiz ve operatör teorik bakış açıları felsefi açıdan çekicidir ve hiç kuşkusuz gelecekte çok daha fazla uygulama alanı bulacaktır. Sonunda herkes yerel bilgisayar merkezi kaynaklı başarı öyküsünün farkında olacaktır.

Söylemek istediğim teorinin genellik ve uygulanabilirlik ihtiyacı olduğudur. Böyle bir teorinin, matematiksel çalışmalar ve mühendislik tekniklerinin gelişimi için bir başlangıç noktası olarak hizmet verebilmesi açısından büyük önemi vardır. Aslında bir köprüyü ya da bu iki faaliyetin arasında iletişim bağlantısı işlevi görebilir.

1970lerin başında zamanın doğrusal olmayan sistem teorisi için bir orta yol formülü olduğu elde edildi. Böyle bir formülasyonun diferansiyel denklemlerin bazı yönlerini kullandığı ve sembollerin yanı sıra operatör- teorik tanımlamalara dönüştürdüğü görülmektedir. Asıl soru her nasılsa, yapısal varsayımlar yaparak ve patolojileri redderek, oldukça basit ve oldukça genel olan doğrusal olmayan sistem teorisinin nasıl geliştiğidir. Bu bakış açısı ile doğrusal sistemler için yaklaşımların doğrusal olmayan teoriye genişletilebilir olması gerektiğini hissettirmektedir. Bu teorinin uygulamacılar kadar araştırmacılar tarafından da kullanılması önemli bir noktadır.

Bu değerlendirmeler beni doğrusal olmayan sistemler için Volterra/Wiener tasarımına götürdü.1950'den beri yayınlanan makaleler mühendislik literatüründe düzenli bir şekilde bu konunun görülmesine yol açtı. Araştırmalar öyle gösteriyor ki son yıllarda doğrusal sistem teorisi çok başarılı oldu. İlk sorun bazı terminolojik karakterize belirsizlikleri önlemek ve doğrusal sistem teknikleri uzantısını kolaylaştırmak konularında uzmanlaşmaktı. Benim yaklaşımım geri beslemesiz doğrusal dinamik sistemlerin bağlantılarından oluşmuş sistemleri ve basit statik doğrusal olmayan elemanlar değerlendirmek yönündeydi.

Tabii ki bir çok insan yukarıda özetlenen bir takım ihtiyaçların farkında. Aynı zamanda ben Volterra/Wiener serileriyle çalışmaya başladım ve diğerleri doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin yapısında uzmanlaşmak suretiyle kayda değer başarı elde ettiler. Bilinear durum denklemlerinin, doğrusal durum denklemleri ile ilgili birçok analiz araçlarını kullanarak yapılan analizlerle uyumlu olduğu gözlenmiştir. Ayrıca bilinear durum denklemleriyle ilgili çözümleri Volterra/Wiener serileri oldukça basitleştirecektir.

Bilinear durum denklemleri,yapısal ara bağlantı sistemleri, Volterra / Wiener serileri bu kitapta anlatılan konular arasındadır. Bu konuların doğrusal olmayan sistemlerle ilgili mühendislik ürünlerine katkıda bulunacağına inanıyorum. Belirtmekte yarar var, doğrusal olmayan sistemleri analiz etmek çok da verimli olmayabilir. Özellikle analitik metot verildiğinde belirsiz sistemleri bulmak hiç de zor değildir. İşin kötüsü Volterra / Wiener serilerinin ne zaman kullanılacağını kestirmekte güç. Genel kanı eğer doğrusal olmayışlık az ise; Volterra / Wiener serileri kullanılmakta.

Okuyucudan biraz yardım talep ediyorum. Benim tek tavsiyem tüm metotları aklınızda tutmanızdır. Sorular genellikle diferansiyel denklemleri temel alan metotların uygulanması konusunda olmuştur. Zaman düzlem ve bilgisayar merkezli yöntemlerin yeri geldiğinde kullanışlı olduğunu unutmayın. Buradan anlatılan konuların okuyucular tarafından sorgulanmasını ve tartışılmasını istiyorum. Teori tamamlanmadı ve daha da geliştirilebilir. Tüm rüzgarlara ve dalgalara rağmen engin denizlere açılan bir yelkenliye benzeyen doğrusal olmayan denklemler teorisinin katkılarıyla oluşturulacak mühendislik icatları tüm bu zahmetlere değer gibi görünüyor.

Basit fiziksel örnekler için yapılan araştırmaların daha verimli olduğu kanıtlamıştır. Sonuç olarak, kitapta uygulamalardan hesaplamalar veya teknik özellikler göstermektedir. Her bölüm için aynı durumdan söz edilebilir. Sorunları aydınlatmak ve bu konuya aşinalık kazandırmak hedeflenmiştir. Her ne kadar kavramlar Volterra / Wiener serilerine yer verse de ve. formülleri oldukça uzun olur ve bilinmeyen özelliklere sahip olma eğilimi gösterse de bu yaklaşım hiç de zor değildir. Kanımca çalışkan bir okuyucu bu sorunların üstesinden çabucak gelecektir.

BÖLÜM 1

Giriş/Çıkışın Zaman Düzleminde Gösterimi

Volterra/Wiener Serileri; Doğrusal olmayan sistemler için Volterra fonksiyonlarının matematiksel gösterimidir. Yani matematiksel bir araç gibidir, sistem giriş/çıkışındaki bu gösterim matematiksel olmadığı sürece tartışılmaz. Bende bu durumu; bilinen doğrusal sistemlerden başlayıp, doğrusal olmayan sistemlerin basit örnekleri doğrultusunda ele alacağım. Öncelikle bizler daha alışıla gelen doğrusal sistemleri tekrar gözden geçireceğiz, daha sonrasında ise homojen doğrusal olmayan sistemler (birinci derece Volterra serileri), Çok terimli sistemler (sınırlı Volterra serileri), ve Volterra sistemlerini (Sınırsız seriler) sırasıyla göreceğiz.

Bu bölüm büyük ölçüde terminolojiye ayrılmış olup; sistemlerin nasıl formülize edileceği ile doğrusal olmayan sistemlerdeki temel işlemler ile ilgilidir. Volterra/Wiener serilerinin yazımı ile ilgili olarak farklı birkaç yol incelenecek ve bunlar arasındaki ilişkiler kurulacaktır. Özellikle ayrıntılı olarak ele alınacak olan üç gösterim formu vardır, bunlar: Simetrik Form, Üçgensel Form ve Normal Formdur. Bu formların hepsinin kendilerine göre avantajları ve dezavantajları olmasına rağmen, hepsi kitabın sonraki bölümlerinde kullanılacaktır. Birinci bölümün sonuna geldiğimizde ise Sistemlerin gösteriminde kullanılan Volterra serilerinin kökenini tartışacağız.

1.1 Doğrusal Sistemler

Tek girişli, Tek çıkışlı, doğrusal, durağan ve nedensel olarak tanımlanan bir sistemin Giriş/Çıkışını düşündüğümde, okuyucunu bu tarz bir gösterime aşına olduğunu değerlendiriyorum;

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma \quad (1)$$

Formülde bulunan $u(t)$: giriş sinyalini

$y(t)$: çıkış sinyalini

$h(t)$: dürtü cevabını gösterir,

$h(t)$ bundan dolayı çekirdek olarak adlandırılır ve $t < 0$ olduğu durumlarda $h(t) = 0$ varsayılır.

Bununla (1) birlikte birkaç teknik varsayım daha bulunmaktadır. Genellikle varsayılanlar ise; $t \in (-\infty, \infty)$ için $h(t)$ 'nin gerçek değerli bir fonksiyon olarak tanımlanması ve $t = 0$ anı hariç genellikle kesikli sürekli bir dürtü fonksiyonunun oluşmasıdır. Bunun yanında $t \in (-\infty, \infty)$ için giriş sinyali gerçek değerli bir fonksiyon olarak tanımlanabilir ve genellikle de kesikli sürekli olduğu varsayılır, buna rağmen dürtüleri de içerebilir. Sonuç olarak, dürtü meselesi bir yana, bu durumlar $t \in (-\infty, \infty)$ için çıkış sinyalinin sürekli, gerçek değerli bir fonksiyon olarak tanımlandığını ima eder.

Tabiki daha genel varsayımlarda tanımlanabilir ancak şuan burada varmak istediğimiz sonuç için bunlar gereksiz olur. Aslında, bu varsayımları sonuca varana kadar tekrarlamak sıkıcı olacaktır. Bundan dolayı, bende bu konuyu anlaşılmış olarak değerlendiriyorum. Sistem tanımlayıcıları için yukarıda kullanılan varsayımların geçerli olduğunu doğrulamanın okuyucular için faydalı olabileceğini düşünüyorum.

Tabii ki doğrusallık kavramı integral (1) özellikleriyle iç içedir. Bu $h(t)$ 'nin tek taraflı varsayımına nedensellik ilkesiyle karşılık geldiğini görmek çokta zor değildir. Ayrıca sistemin belirli bir zamandaki çıkışı, girişin gelecek değerlerine bağlı değildir.

Daha da doğru şekliyle belirtmek gerekirse, eğer $u(t)$ 'nin yanıtı $y(t)$ ise, $u(t-T)$ 'nin herhangi bir $T \geq 0$ anı için yanıtı $y(t-T)$ 'dir. Dolayısıyla sistem durağandır.

Tek taraflı bir varsayım olan $h(t)$; (1).denklemdaki sonsuz alt sınırın 0'la değiştirilebileceğini gösterir. Sadece giriş sinyalleri dikkate alındığında $t=0$ ve (1).denklemdaki üst limit ise genellikle t olacaktır.

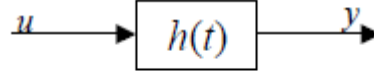
Sınırları sonsuz olan bir ifadenin içindeki fonksiyonun değişkenlerinin birçok değişikliğine rağmen sınırlarının değiştirilmesine nadiren ihtiyaç duyulması gibi bir avantajı vardır. Bunun yanında yapılan bazı işlemlerde, işlemin olduğundan daha zor görülmesi gibi bir dezavantajı da vardır.

Örneğin, (1).denklemdaki herhangi bir değişken değişikliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma \quad (2)$$

Bu denklemde (2) tek taraflı bir varsayım olarak $h(t)$; $u(t)$ 'nin alt limitinin 0 olduğu durumlarda üst limitinin de t olabileceğini gösterir. (1).gösterim genellikle doğrusal sistemleri göstermek için daha çok kullanılır çünkü (2).gösterime göre çekirdeğin daha sade bir şekilde verilmiş olmasıdır.

Doğrusal sistemlerin giriş/çıkış noktalarının gösterimi için şöyle bir diyagram (Şekil 1.1) kullanılabilir.



Şekil 1.1.Durağan bir doğrusal sistem

Eğer Sistemin durağan ve taşınabilir olduğu varsayılırsa, giriş/çıkışlar şu şekilde elde edilir ve gerçek zamanlı bir fonksiyon olarak $h(t, \sigma)$; $h(t, \sigma)=0$ için $t \in (-\infty, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \infty)$ şeklinde tanımlanır ve $\sigma > t$ olduğunda şu şekilde yazılır:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (3)$$

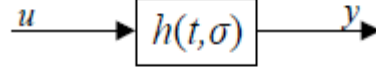
Öncelikle, bu tip bir doğrusal sistem gösterimlerinin kontrol edilmesi çok kolaydır ve $h(t, \sigma)$ nedensel özel bir varsayımdır. Elbette $\sigma = t$ eşitliği için $h(t, \sigma)$ dürtüler içerir fakat $t \geq \sigma \geq 0$ için bu dürtüler kesikli sürekli şekilde olur. Daha öncede söylendiği gibi bu denkleminde (3) sınırları değiştirilerek daraltılabilir.

(2). Ve (3). Denklemlerin birleştirilmesi sonucu durağan doğrusal sistemlerin durağan olmayan doğrusal sistemlerin özel bir durumu olduğu görülebilir.

Bundan dolayı (3).denkleminde çekirdek diye adlandırılan $h(t, \sigma)$, eğer aşağıdaki gibi bir $g(t)$ çekirdeğiyle oluşturulursa;

$$g(t - \sigma) = h(t, \sigma) \quad (4)$$

$h(t, \sigma)$ ' nin durağanlık kontrolünü kolayca yapmak için $h(0, \sigma - t) = h(t, \sigma)$ ' ye bakmak gerekir. Eğer bu durum tatmin ediciyse, $g(t - \sigma) = h(0, \sigma - t) = h$ olduğu sürece $g(t) = h(0, -t)$ olarak kanıtlanır.



Şekil 1.2. Durağan olmayan bir doğrusal sistem

1.2 Benzer Doğrusal Olmayan Sistemler

Giriş/Çıkışın doğrusal olmayan sistemlerdeki gösterimi, Bölüm 1.1’de sözü geçen basit genellemeleri içerir. Daha zor olanı ise belirtilmemiş ve bu gösterim için sorulabilecek felsefi çoğu soru ve gösterimin kullanılışlığı daha sonraya bırakılmıştır. Şu an da ise aşağıda yazacağım gösterimlerde doğrusal olmayan sistemlerin bazı özelliklerini ve dikkat çekici bazı örnekleri tartışacağız.

$t, \sigma(-\infty, \infty)$ için tanımlanan $h_n(t_1, \dots, t_n)$ gerçekte değerli fonksiyonlardaki n değişkenleri; herhangi bir $t_i < 0$ zamanında $i=1, \dots, n$ ve $h_n(t_1, \dots, t_n)=0$ eşitliğindeki gibi giriş/çıkışla ilgilidir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (5)$$

Bundan önceki kısımda doğrusal sistemlerin gösterimlerinin aralarındaki benzerlikler gayet açıktır. Ayrıca kullanılan doğrusal sistemlerin gösterimlerin tümü burada da (1).denkleme uygundur. Aslında (5).denklem genel bir denklem olarak bilinir ancak ben bu terimi kullanmayacağım.

Konuyla ilgili olarak sorulacak olan ilk soru muhtemelen (5).denklemden kullanılan ifadelerin neler olduğudur. Varsayımdaki $h_n(t_1, \dots, t_n)$; her değişken için tek taraflı nedenselliğin karşılığı olduğu açıktır. Bu sistem doğrusal değildir ancak durağandır.

(5).denklemdaki sistem gösterimi n-dereceli bir benzer(homojen) sistem gösterimi olarak adlandırılır. Bu terminoloji α 'nın sayısal olduğu her değerde uygulama alanı bulur ve $y(t)$ 'nin $u(t)$ 'nin yansıması olduğu durumlarda $\alpha^n h_y(t)$ çıkışı sağlar. Bu terminoloji, 1.dereceden doğrusal sistemlerin nedenini içerir. *Bu sistem ile, $h_n(t_1, \dots, t_n)$ doğrusal durumlarda kullanılan çekirdek olarak adlandırılır.*

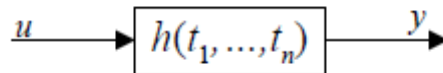
Herhangi bir karışıklığın ortada kalmaması ve gösterim kolaylığı için (5).ifadeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (6)$$

Çekirdekle ilgili tek taraflı varsayımdan dolayı bu gösterimdeki alt limitler 0'a eşitlenebilir. Eğer giriş sinyali tek taraflı bir varsayım olursa üst limit(ler) için t kullanılabilir. Sonuçta; (6).denklemdaki integralin tüm değişkenleri için değişimler aşağıda yeniden yazılarak gösterilmiştir.

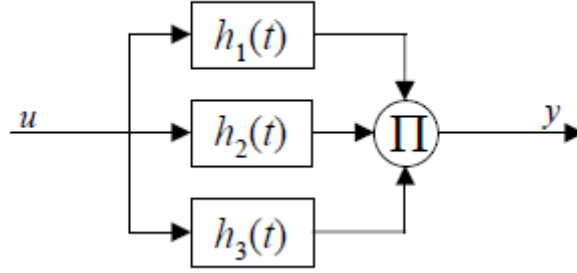
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma_1, \dots, t-\sigma_n) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (7)$$

Bu noktaya gelindiğinde; n.dereceden benzer(homojen), durağan bir sistemin diyagramda gösterimi Şekil 1.3'te yer almaktadır. Sistem kutusu çekirdeğin kendisidir.



Şekil 1.3. Durağan n.dereceden benzer(homojen) bir sistem

Örnek 1.1 Üç doğrusal sistemin çarpımsal bağlantısı Şekil 1.4'te gösterilmiştir.



Şekil 1.4. Yapılandırılmış bir bağlantı sistemi

Doğrusal alt sistemler şu şekilde tanımlanır:

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma, \quad i = 1,2,3$$

Bundan dolayı da tüm sistem ise şöyle tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t)y_2(t)y_3(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\sigma_1)h_2(\sigma_2)h_3(\sigma_3)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)u(t-\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \end{aligned}$$

Açıkçası, 3.dereceden benzer(homojen) bir sistemin çekirdeği;

$$h(t_1, t_2, t_3) = h_1(t_1)h_2(t_2)h_3(t_3)$$

Doğrusal olmayan bir sistem tanımının, benzer(homojen) sistemlerle oluşturulmasının ikinci bir yolu da vardır. Bu tanım için; her değişken $x_i(t)$ 'nin bir popülasyonu gösterdiğini düşünün; eğer $x_i(t)$ değerindeki değişimler diğer $x_i(t)$ değerlerinin doğrusal değişimine bağlı fakat bir skaler parametrik kontrol sinyali ise $x_i(t)$, $du(t)x_j(t)$ 'nin her türlü formunu içerir. Doğrusal olmayan

modellerin bu şekildeki yazımına “*bilinear durum denklemleri*” denir.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t)u(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0\end{aligned}$$

$x(t)$ $n \times 1$ vektörü

$u(t)$ ve $y(t)$ skaler giriş, çıkış sinyalleri

Bu durum denklemlerinin ayrıntılı olarak gösterimi daha sonra yapılacaktır, şimdiyse basitçe benzer(homojen) sistemlerin gösterimini belirtmek için nasıl kullanılacağı tartışılacaktır.

Örnek 1.2 Doğrusal olmayan sistemlerin diferansiyel denklemler ile tanımlanması:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Dx(t)u(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0\end{aligned}$$

$x(t)$: 2×1 vektörü

$u(t)$ ve $y(t)$ skaler ve

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 1]$$

Kesikli sürekli tüm giriş sinyalleri için $t \geq 0$ olan her durumda bu ifade şu şekilde yazılır: (Bunun ispatını ise bir çalışma olarak sizlere bırakıyorum.)

$$x(t) = \int_0^t e^{\int_{\sigma_2}^t D \int_{\sigma_1}^t u(\sigma_1) d\sigma_1} bu(\sigma_2) d\sigma_2$$

Burada ki exp ifadesinin açılımı aşağıdaki gibi olur;

$$e^{\int_{\sigma_2}^t D \int_{\sigma_1}^t u(\sigma_1) d\sigma_1} = I + D \int_{\sigma_2}^t u(\sigma_1) d\sigma_1 + \frac{1}{2!} D^2 \left[\int_{\sigma_2}^t u(\sigma_1) d\sigma_1 \right]^2 + \dots$$

$D^2=0$ özel durumu içinde;

$$e^{D \int_{\sigma_2}^t u(\sigma_1) d\sigma_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \int_{\sigma_2}^t u(\sigma_1) d\sigma_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan da giriş / çıkış ilişkisi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t c e^{D \int_{\sigma_2}^t u(\sigma_1) d\sigma_1} b u(\sigma_2) d\sigma_2 \\ &= \int_0^t \int_{\sigma_2}^t u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \end{aligned}$$

Bu gösterimden sistemin homojen ve 2.dereceden olduğu açıkça görülebilmektedir. Giriş / çıkış gösterimini daha tanıdık bir formda yazmak için, birim adım fonksiyonu;

Şu şekilde yazılabilir:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t \int_0^t \delta_{-1}(\sigma_1 - \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

Buradan da çekirdek; $h(t_1, t_2) = \delta_{-1}(t_1 - t_2)$ şeklinde olur.

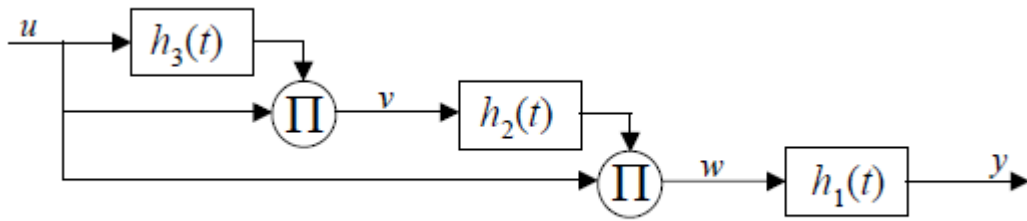
Bu bölümden sonraki bölümlerde, homojen sistemlerin sabit olmayabileceği hususu dikkate alınmalıdır. Aşağıda gösterilen bir sistemin giriş/çıkış ifadesi gibi;

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (8)$$

Her hangi bir $\sigma_i > t$ için çekirdeğin $h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$ olduğunu varsayalım bu durumda sistem nedensel olacaktır. Tabi ki, bunun oluşması için üst limitlerin t ile değiştirilir. Eğer tek taraflı bir giriş dikkate alınmışsa; alt limitlerde 0'a eşitlenmelidir.

Doğrusal olmayan benzer(homojen) sistemlere basit bir örnek olması için, okuyucular örnek 1.1'i doğrusal sistemlerin durağan olmadığı varsayımıyla tekrar edebilirler. Ama ben burada durağan olmayan gösterimlerin, durağan bir system yapısından ileri geldiğine değineceğim.

Örnek 1.3 Şekil 1.5'te gösterilen bağlantılar Örnek 1.1'e göre biraz daha karmaşıktır. Öncelikle çekirdeği bulmanın kolaylaşması için; giriş sinyali ve tüm sinyallerin gösterimini ve çıkışa doğru nasıl bir yol izlediklerini bularak işe başlamanın çok önemli olduğunu belirtmek istiyorum.



Şekil 1.5. Örnek 1.3'teki sistem

$v(t)$ sinyali şu şekilde yazılabilir;

$$v(t) = \int_{-\infty}^t h_3(t-\sigma_3)u(\sigma_3) d\sigma_3 u(t)$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t h_2(t-\sigma_2)v(\sigma_2) d\sigma_2 u(t) \\ &= \int_{-\infty}^t h_2(t-\sigma_2) \int_{-\infty}^{\sigma_2} h_3(\sigma_2-\sigma_3)u(\sigma_3) d\sigma_3 u(\sigma_2) d\sigma_2 u(t) \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\sigma_2} h_2(t-\sigma_2)h_3(\sigma_2-\sigma_3)u(\sigma_3)u(\sigma_2) d\sigma_3 d\sigma_2 u(t) \end{aligned}$$

Çıkış sinyali;

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t h_1(t-\sigma_1)w(\sigma_1) d\sigma_1 \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\sigma_2} h_1(t-\sigma_1)h_2(\sigma_1-\sigma_2)h_3(\sigma_2-\sigma_3)u(\sigma_1)u(\sigma_2)u(\sigma_3) d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$

Böylece 3.dereceden bir sistem için çekirdek bu şekilde yazılır:

$$h(t, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = h_1(t-\sigma_1)h_2(\sigma_1-\sigma_2)h_3(\sigma_2-\sigma_3)\delta_{-1}(\sigma_2-\sigma_3)\delta_{-1}(\sigma_1-\sigma_2)$$

Doğrusal alt-sistem çekirdekleri için yapılan tek taraflı varsayımlarda, adım fonksiyonları fazlalık olarak dikkate alınabilir. Daha da önemlisi, Örnek 1.1 ve 1.3 karşılaştırılınca çekirdeklerin farklı sistem yapıları için farklı şekillerde olduğudur.

Durağan olmayan sistemler için (8).denklem ve durağan sistemler için (7).denklemin karşılaştırılmasıyla bir $h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ çekirdeğinin durağan olduğu gözükmemektedir.

$$g(t - \sigma_1, \dots, t - \sigma_n) = h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (9)$$

Eğer tüm $t, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ değerlerini içerirse, Genellikle durağanlık kontrolü için fonksiyonların ilişkilerinin kontrolü daha uygun olur.

$$h(0, \sigma_1 - t, \dots, \sigma_n - t) = h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (10)$$

Buradan da (9).denklem aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$g(t_1, \dots, t_n) = h(0, -t_1, \dots, -t_n) \quad (11)$$

(10).denkleminde (8).denklemin içerisine yazarsak;

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \sigma_1, \dots, t - \sigma_n) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (12)$$

Örnek 1.3 için bu hesaplamaların yapılması Şekil 1.5'teki sistem için değişmeyen bir çekirdeği verir:

$$g(t_1, t_2, t_3) = h_1(t_1)h_2(t_2 - t_1)h_3(t_3 - t_2)\delta_{-1}(t_3 - t_2)\delta_{-1}(t_2 - t_1)$$

Bölüm 1.1'de de belirtildiği üzere doğrusal sistemler teorisi çekirdek için dürtü fonksiyonları oluşumuna izin verir. Örneğin (1).denklem, $g(t)$ 'nin kesikli sürekli bir fonksiyon ve $t=0$ anındaki $\delta_0(t)$ dürtüsünün olduğu durumlarda $h(t)=g(t)+g_0 \delta_0(t)$ şeklinde olur. Dolayısıyla giriş $u(t)$ 'nin cevabı ise;

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} g_0\delta_0(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma + g_0u(t)
\end{aligned} \tag{13}$$

Girişin $u(t)=\delta_0(t)$ şeklinde alınması herhangi bir sorun yaratmayacaktır.Sonuçta dürtü cevabı:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\sigma)\delta_0(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} g_0\delta_0(t-\sigma)\delta_0(\sigma) d\sigma \\
&= g(t) + g_0\delta_0(t)
\end{aligned} \tag{14}$$

Ne yazık ki bu konular $n>1$. dereceden olan benzer sistemler için çok daha dolambaçlıdır. Bu tür sistemler için, iletim oluştuğunda dürtü girişleri büyük sorunların doğmasına sebep olur.

Örneğin 2.dereceden sistemlerin giriş/çıkış ilişkisi:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\sigma_1,t-\sigma_2)u(\sigma_1)u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-\sigma_1)u^2(\sigma_1) d\sigma_1 + g_0u^2(t)
\end{aligned} \tag{15}$$

Bu gösterim ise çekirdekdeki dürtülere izin verildiğini gösterir.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma_1, t-\sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

ve

$$h(t_1, t_2) = g(t_1, t_2) + g_1(t_1) \delta_0(t_1 - t_2) + g_0 \delta_0(t_1) \delta_0(t_2) \quad (16)$$

şeklinde gösterilir.

1.3 Çok terimli Volterra Sistemleri

Sonlu bir toplamla tanımlanan sistem:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (36)$$

çok terimli (polynomial) sistem olarak tanımlanır ve $h_N(t_1, \dots, t_N) \neq 0$ olduğu sürece N.dereceden olur. Eğer bir sistem sonsuz toplam şeklindeyse Volterra sistemi olarak isimlendirilir.

Özel bir durumu göstermek gerekirse; Statik doğrusal olmayan sistemlerin girişi, bir polinom ya da güç serisi ile tanımlanabilir

$$y(t) = a_1 u(t) + \cdots + a_N u^N(t)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n(t) \quad (37)$$

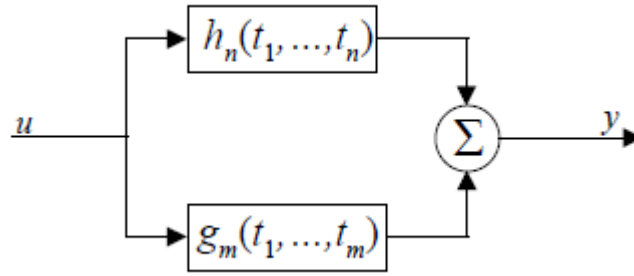
Volterra sistemi sonsuz bir dizi ile gösterildiği sürece, anlamlı olduğunu garanti etmek için yakınsama koşulları ilişkilendirilmiş olması gerekir. Genellikle bu şartları içeren bir zaman aralığı ve buna bağlı bir $u(t)$ olarak gösterilir. Bu

genellikle birbirini üzerine kabaca ters bir şekilde bağlıdır. Zaman aralığını daha büyük olduğundan, girişin sınırları daha küçük olmalıdır. Hesaplamalar uygun sınırları bulmak için sık sık tekrarlanması zorunlu bir gerekliliktir.

1.4 Doğrusal Olmayan Sistemler Bağlantısı

Doğrusal olmayan sistemlerin üç temel bağlantısı dikkate alınacaktır. Bunlar: Katkı ve Çarpımsal Paralel bağlantı ve Cascade bağlantı. Elbette, Katkı Paralel ve Kaskad bağlantıları doğrusal sistemlerin teorisi ile, tanıdık gelecektir. Çarpımsal paralel bağlantı muhtemelen yabancı gelebilir, ancak doğrusal olmayan bağlantılar için doğal bir şey gibi görünüyormuş olmalıdır.

Homojen sistemlerin bağlantılarını ilk önce ele alalım.



Şekil 1.9. Bir katkı paralel bağlantısı

İki homojen sistemlerin temel katkı bağlantısı Şekil 1,9 gösterilir. Genel bir sistem şu şekilde açıklanabilir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n + \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sigma_1, \dots, \sigma_m) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_m) d\sigma_1 \cdots d\sigma_m \quad (38)$$

$m = n$ açıkça belli olduğu zaman n.dereceden bir sistem olduğu söylenebilir.

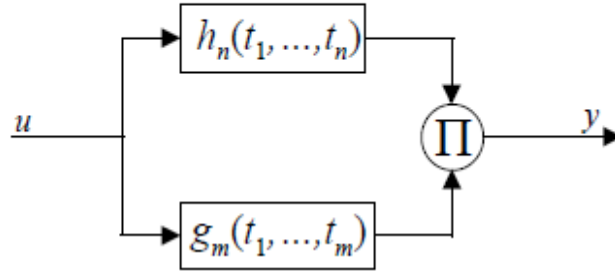
$$f_n(t_1, \dots, t_n) = h_n(t_1, \dots, t_n) + g_n(t_1, \dots, t_n) \quad (39)$$

Eğer tüm çekirdekler $h_n(t_1, \dots, t_n)$ ve $g_m(t_1, \dots, t_m)$ şeklinde olursa, çekirdek $f_n(t_1, \dots, t_n)$ şeklinde simetrik(triangular) olur. $m \neq n$ olduğunda ise toplam sistem $N = \max[n, m]$ dereceden bir çok terimli(polynomial) sistem olur.

Çarpımsal paralel bağlantısı Şekil 1,10 da gösterilir. Tüm bunların matematiksel gösterimi;

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t - \sigma_1) \cdots u(t - \sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \right] \\
 &\quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sigma_1, \dots, \sigma_m) u(t - \sigma_1) \cdots u(t - \sigma_m) d\sigma_1 \cdots d\sigma_m \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) g_m(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+m})] u(t - \sigma_1) \\
 &\quad \cdots u(t - \sigma_{n+m}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n+m}
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$f_{n+m}(t_1, \dots, t_{n+m}) = h_n(t_1, \dots, t_n) g_m(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) \tag{41}$$



Şekil 1.10. Bir Çarpımsal paralel bağlantı.

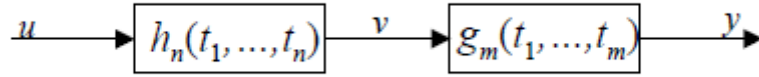
Genel olarak, simetri bu durumda korunmaz.

İki sistemin kaskad bağlantısı Şekil 1,11’de gösterilir. Bu bağlantı şu şekilde yazılabilir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sigma_1, \dots, \sigma_m) v(t - \sigma_1) \cdots v(t - \sigma_m) d\sigma_1 \cdots d\sigma_m \quad (42)$$

$j=1, \dots, m$, olduğu yerler için;

$$v(t - \sigma_j) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_{m+(j-1)n+1}, \dots, \sigma_{m+jn}) u(t - \sigma_j - \sigma_{m+(j-1)n+1}) \cdots u(t - \sigma_j - \sigma_{m+jn}) d\sigma_{m+(j-1)n+1} \cdots d\sigma_{m+jn} \quad (43)$$



Şekil 1.11. İki sistemin kaskad bağlantısı

Bu verilmiş olan (42). ve (43). denklemleri daha güzel bir ifadeyle yazarsak:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{m+n}) u(t - \sigma_1 - \sigma_{m+1}) \cdots u(t - \sigma_1 - \sigma_{m+n}) d\sigma_{m+1} \cdots d\sigma_{m+n} \right] \cdots \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_{m+(m-1)n+1}, \dots, \sigma_{m+mn}) u(t - \sigma_m - \sigma_{m+(m-1)n+1}) \cdots u(t - \sigma_m - \sigma_{m+mn}) d\sigma_{m+(m-1)n+1} \cdots d\sigma_{m+mn} \right] d\sigma_1 \cdots d\sigma_m \quad (44)$$

ve buradan da;

$$\begin{aligned}
y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sigma_1, \dots, \sigma_m) h_n(\tau_1 - \sigma_1, \dots, \tau_n - \sigma_1) \right. \\
\left. \dots h_n(\tau_{(m-1)n+1} - \sigma_m, \dots, \tau_{mn} - \sigma_m) d\sigma_1 \dots d\sigma_m \right] u(t - \tau_1) \\
\dots u(t - \tau_{mn}) d\tau_1 \dots d\tau_{mn}
\end{aligned} \tag{45}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
f_{mn}(t_1, \dots, t_{mn}) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sigma_1, \dots, \sigma_m) h_n(t_1 - \sigma_1, \dots, t_n - \sigma_1) \\
\dots h_n(t_{(m-1)n+1} - \sigma_m, \dots, t_{mn} - \sigma_m) d\sigma_1 \dots d\sigma_m
\end{aligned} \tag{46}$$

Bu bağlantıda simetrimin kaybedildiğini söylemeye gerek yok. Yani $f_{mn}(t_1, \dots, t_{mn})$ ayrık bir operatör gibi simetrileştirilmelidir.

2.BÖLÜM

GİRİŞ/ÇIKIŞIN DÖNÜŞÜM ALANINDA GÖSTERİMİ

Laplace dönüşümü, genel olarak sabit doğrusal olmayan sistem teorisi önemli önemli bir araçtır. Doğrusal sistemlerde olduğu gibi çok değişkenli çekirdeğin Laplace dönüşümüne transfer fonksiyonu denir. Bu gösterim her iki sistem özelliklerini karakterize etmek ve sisteme giriş / çıkış davranışı tarif için yararlıdır. Ayrıca, sistemleri bağlantılarını tanımlamaya yönelik kurallar transfer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Tüm bu özelliklerin temel sebebi, belirli Çok değişkenli Laplace dönüşümü ürünleri açısından, tek değişken durumunda da temsil edilebilir.

Her homojen sisteminin çekirdeği için özel formlara karşılık, transfer fonksiyonun özel bir şeklidir. Polinom ve Volterra sistemleri transfer fonksiyonlarına karşılık gelen

homojen alt sistemler olarak tanımlanabilir. Tüm bu gösterimler kapsamlı bir şekilde anlatılacaktır.

2.1 Laplace Dönüşümü

Laplace tanımı için bir dönüşümü gözden geçirerek başlayalım, gerçek değerli fonksiyon $f(t)$:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

Genellikle, fonksiyonların üstel formları ile karşılaşılır, başka bir deyişle sonlu lineer kombinasyonlar $t^m e^{\lambda t}$ şeklinde ifade edilir. λ karmaşık olabilir fakat eşlenik çiftlerin şartları nedeniyle, fonksiyon gerçek olur. Bu tür integral fonksiyonları(1) "s" leri kompleks düzleme yakınsar ve çıkan dönüşümün "s" in gerçek katsayısı rasyonel

işlevi olduğu kesinlikle doğrudur. Bu gözlemlerin sonucu olarak fonksiyonların sınırlı sınıflarının düzenlenmesinde kullanılan Laplace dönüşümünün cebirsel bakış açısı için uygun olduğudur.

Ters laplace dönüşümü hesaplaması $f(t)$ den $F(s)$ 'e:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2)$$

Burada σ , $F(s)$ yakınsama bölgesi içerisinde seçilir. Rasyonel Laplace dönüşümleri için kısmi kesir genişletme yöntemi kullanılır ve hesaplamalar sorunsuz olduğu kadar yakınsama ilgili sorunlarda vardır.

n değişkenlerin bir fonksiyonu göz önüne alındığında $f(t_1, \dots, t_n)$, her değişkenin tek taraflı olduğunu, Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$F(s_1, \dots, s_n) = L[f(t_1, \dots, t_n)] \\ = \int_0^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) e^{-s_1 t_1} \dots e^{-s_n t_n} dt_1 \dots dt_n \quad (3)$$

Bu tanım da yakınsama değerlendirmelerine bağlıdır. $f(t_1, \dots, t_n)$ bu formların doğrusal kombinasyonlarıdır.

$$t_1^{m_1} e^{\lambda_1 t_1} t_2^{m_2} e^{\lambda_2 t_2} \dots t_n^{m_n} e^{\lambda_n t_n}, \quad t_1, \dots, t_n \geq 0$$

İntegral(2) ve integral(1) bir toplamı olarak yazılmış olabilir. Bu yakınsama bölgelerinin her zaman var olduğunu gösterir. Entegrasyonlar yürütmek, Laplace dönüşümlerinin bir değişkenden daha fazla rasyonel fonksiyondan oluştuğunu gösterir. üstel formların Üçgen etki alanında benzer araştırmalar ve simetrik üstel

formlar benzer sonuçlara yol açar. Ancak yakınsama bölgelerin genel olarak daha karmaşık geometrisi vardır.

Örnek 2.1 Laplace dönüşümünü hesaplamak için

$$f(t_1, t_2) = t_1 - t_1 e^{-t_2}, \quad t_1, t_2 \geq 0$$

Tanıma göre(3):

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty (t_1 - t_1 e^{-t_2}) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t_1 e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2 - \int_0^\infty \int_0^\infty t_1 e^{-t_2} e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{s_1^2} \int_0^\infty e^{-s_2 t_2} dt_2 - \frac{1}{s_1^2} \int_0^\infty e^{-t_2} e^{-s_2 t_2} dt_2 \\ &= \frac{1}{s_1^2 s_2 (s_2 + 1)} \end{aligned}$$

Çok değişkenli Laplace dönüşümü ve özelliklerini sonradan tanımlamak ve kanıtlamak oldukça basit. Bu çok değişkenli dönüşüm kullanarak yapılan hesaplamaların tek değişken dönüşümü ile ilgili olarak yapılan hesaplamalar kadar basit olduğunu ima etmemek lazım.

Aşağıdaki liste ve devamı boyunca teoremler tek taraflı kabul edilir ve harf dönüşümleri için harf gösterimi kullanılır.

Teorem 2.1 Laplace dönüşümü işlemi doğrusaldır:

$$L[f(t_1, \dots, t_n) + g(t_1, \dots, t_n)] = F(s_1, \dots, s_n) + G(s_1, \dots, s_n)$$

$$L[\alpha f(t_1, \dots, t_n)] = \alpha F(s_1, \dots, s_n), \text{ for scalar } \alpha \quad (4)$$

Teorem 2.2 $f(t_1, \dots, t_n)$ iki faktörün bir ürünü olarak yazılabilir

$$f(t_1, \dots, t_n) = h(t_1, \dots, t_k)g(t_{k+1}, \dots, t_n) \quad (5)$$

$$F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1, \dots, s_k)G(s_{k+1}, \dots, s_n) \quad (6)$$

Teorem 2.3 $f(t_1, \dots, t_n)$ formun bir konvolusyonu şekilde yazılabilir

$$f(t_1, \dots, t_n) = \int_0^\infty h(\tau)g(t_1 - \tau, \dots, t_n - \tau) d\tau \quad (7)$$

$$F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1 + \dots + s_n)G(s_1, \dots, s_n) \quad (8)$$

Teorem 2.4 $f(t_1, \dots, t_n)$ n-form konvolüsyonun bir formu olarak yazılabilir

$$f(t_1, \dots, t_n) = \int_0^\infty h(t_1 - \sigma_1, \dots, t_n - \sigma_n)g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (9)$$

$$F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1, \dots, s_n)G(s_1, \dots, s_n) \quad (10)$$

Teorem 2.5 $T_1, \dots, T_n$ negatif olmayan birer sabitse

$$L[f(t_1-T_1, \dots, t_n-T_n)] = F(s_1, \dots, s_n)e^{-s_1T_1-\dots-s_nT_n} \quad (11)$$

Teorem 2.6 $f(t_1, \dots, t_n)$ sonuç tarafından verildiyse

$$f(t_1, \dots, t_n) = h(t_1, \dots, t_n)g(t_1, \dots, t_n) \quad (12)$$

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(s_1-w_1, \dots, s_n-w_n)G(w_1, \dots, w_n) dw_1 \cdots dw_n \quad (13)$$

Örnek 2.2

$$f(t_1, t_2) = e^{-t_1-2t_2} - e^{-t_1-3t_2}, \quad t_1, t_2 \geq 0$$

Laplace dönüşümü için tanım(3) uygulanırsa, şu şekilde yazılabilir

$$f(t_1, t_2) = e^{-t_1}(e^{-2t_2} - e^{-3t_2})$$

Teorem 2.2'yi uygularsak, İkinci yaklaşım seçersek tek değişken durumunda sonuçları gösterir ki:

$$F(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1+1} \left[\frac{1}{s_2+2} - \frac{1}{s_2+3} \right] = \frac{1}{s_1s_2^2+s_2^2+5s_1s_2+6s_1+5s_2+6}$$

Eğer numaratör polinomunun derecesi s_j her j için denominator polinom derecesi s_j 'den daha az ise rasyonel , çok değişkenli laplace transformu kesinlikle uygundur.

Bugüne kadar çok değişkenli durumda Laplace da üstel form karşılık olan tartışma, kesinlikle doğru olan rasyonel fonksiyonların üstel formlara karşılık geldiğidir

Örnek 2.3

$$f(t_1, t_2) = \delta_{-1}(t_2 - 2t_1), \quad t_1, t_2 \geq 0$$

$2t_1 = t_2$ ilgili Laplace dönüşümü :

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_{-1}(t_2 - 2t_1) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^{t_2/2} e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{s_1} \int_0^\infty e^{-s_2 t_2} dt_2 - \frac{1}{s_1} \int_0^\infty e^{-[(1/2)s_1 + s_2]t_2} dt_2 \\ &= \frac{1}{s_2(s_1 + 2s_2)} \end{aligned}$$

Örnek 2.4 Dürtü fonksiyonu için

$$f(t_1, t_2) = \delta_0(t_1 - t_2)$$

Laplace dönüşümü doğrudan tanımından hesaplanabilir

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_0(t_1 - t_2) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \delta_0(t_1 - t_2) e^{-s_1 t_1} dt_1 \right] e^{-s_2 t_2} dt_2 \\ &= \int_0^\infty e^{-s_1 t_2} e^{-s_2 t_2} dt_2 \\ &= \frac{1}{s_1 + s_2} \end{aligned}$$

Temel ilişki tek taraflı işlevini belirlemek için kullanılır $f(t_1, \dots, t_n)$ karşılık gelen $F(s_1, \dots, s_n)$ bir formun bir çok satırlı entegrasyonudur.

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n) &= L^{-1}[F(s_1, \dots, s_n)] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s_1, \dots, s_n) e^{s_1 t_1} \dots e^{s_n t_n} ds_1 \dots ds_n \end{aligned} \quad (14)$$

σ 'nun değeri her integralde farklılık gösterir. Genelde uygun yakınsama zorlukları önlemek için seçilmelidir. Uygun tekniklerin varsayımları altında doğrusal integraller, bromvich eş yükselti eğrisi integralleri ile değiştirilebilir. $n = 1$ için ters dönüşüm fonksiyonu, kısmi kesir genişleme yönteminden sonra bahsedilmiştir. Rasyonel ve tek değişkenli laplace dönüşümü doğrusal integrasyonda uygulanabilir değildir. Çok değişkenli laplace dönüşümü için inversiyon prosedürü uygun değildir. Ama daha düz basit bir örnek(14) kullanım hakkında konuşmak için çok daha eğlenceli olabilir.

Örnek 2.5 Ters Laplace dönüşümü hesaplamak için

$$F(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)}$$

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)} e^{s_1 t_1} e^{s_2 t_2} ds_1 ds_2$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s_2} e^{s_2 t_2} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s_1 (s_1 + s_2)} e^{s_1 t_1} ds_1 \right] ds_2$$

Parantez içindeki s_1 ve s_2 a sabiti tek değişken ters Laplace dönüşümü olarak kabul edilebilir.

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s_2} e^{s_2 t_2} \left(\frac{1}{s_2} \delta_{-1}(t_1) - \frac{1}{s_2} e^{-s_2 t_1} \delta_{-1}(t_1) \right) ds_2$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s_2^2} e^{s_2 t_2} ds_2 \delta_{-1}(t_1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s_2^2} e^{-s_2 t_1} e^{s_2 t_2} ds_2 \delta_{-1}(t_1)$$

İlk terimin tek değişkenli ters Laplace dönüşümü olan $1/(s^2)$, yani t_2 ise ikinci terim ile benzer t_1 birimlerinden bir süre belirtilir.

$$f(t_1, t_2) = t_2 \delta_{-1}(t_1) \delta_{-1}(t_2) - (t_2 - t_1) \delta_{-1}(t_2 - t_1) \delta_{-1}(t_1)$$

$$f(t_1, t_2) = \min[t_1, t_2], \quad t_1, t_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{lcl} H(s_1+s_2) = \frac{1}{s_1+s_2} & \Rightarrow & h(t) = \delta_{-1}(t) \\ G(s_1,s_2) = \frac{1}{s_1 s_2} & & g(t_1,t_2) = \delta_{-1}(t_1)\delta_{-1}(t_2) \end{array}$$

Sonuç:

$$\begin{aligned} f(t_1,t_2) &= \int_0^\infty h(\sigma)g(t_1-\sigma,t_2-\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^\infty \delta_{-1}(\sigma)\delta_{-1}(t_1-\sigma)\delta_{-1}(t_2-\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^\infty \delta_{-1}(t_1-\sigma)\delta_{-1}(t_2-\sigma) d\sigma = \int_0^{\min[t_1,t_2]} d\sigma \\ &= \min[t_1,t_2] \end{aligned}$$

Okuyucu bu örneğin ne kadar basit olduğunu düşünebilir. $F(s_1,s_2)$ 'in paydasının ana özelliği basit faktörlerin ürünü olmasıdır. Öyle ki eğrisel integraller, kalıntı hesaplamalar veya kısmi kesir açılımları tarafından kolayca değerlendirilir. Çarpanlarına ayırmadan tek değişken ters dizisini gerçekleştirmek için çok değişkenli ters dönüşümü imkansız olur.

Ters dönüştürme işlemi çok nadiren sonradan gereklidir. Öyleki faktoring sorunu başka bağlamlarda ortaya çıkacak ve diğer bölümde anlatılacaktır.

2.2 Homojen Sistemlerde Laplace Dönüşümü Gösterimi

Sabit bir doğrusal sistem için çekirdek $h(t)$, sistemin Laplace transfer dönüşümü fonksiyonu $H(s)$:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (15)$$

Tek taraflı giriş sinyallerde dikkat sınırlandırılması ve Laplace dönüşümü ile kıvrım özelliğini kullanarak, giriş / çıkış ilişkisi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma = \int_0^t h(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma \quad (16)$$

Bu şekilde yapılabilir

$$Y(s) = H(s) U(s) \quad (17)$$

Eğer bir sistem transfer fonksiyonu ve ilgi giriş sinyali bilinen bir basit $U(s)$ dönüşümü, sonra gelen çıkış sinyali işlem için bu gösterimin yararı açıktır. Transfer fonksiyonunun önemini bir diğer nedeni de birçok sistem özellikleri değil ifade olabilir basit olarak $H(s)$ özellikleridir.

Ayrıca, doğrusal sistemlerin bir "doğrusal" arabağlantı ve transfer fonksiyonu kolayca alt sistemi transferi fonksiyonlardan hesaplanır. Bir n.derece homojen sistemi bir giriş sinyalleri taraflı olarak temsil edilebilir.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \\ &= \int_0^t h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \end{aligned} \quad (18)$$

Çok değişkenli Laplace dönüşümü doğrudan bir şekilde sonuçlanır form (17)ye benzer biçimde sonuçlanır.

$$y_n(t_1, \dots, t_n) = \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t_1 - \sigma_1) \cdots u(t_n - \sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n$$

$$y(t) = y_n(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1 = \dots = t_n = t} = y_n(t, \dots, t) \quad (19)$$

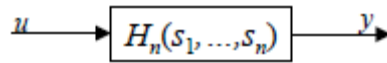
ilk denklemi Laplace dönüşümü 2,4 ve 2,2 teoremleri kullanarak (19) ile arasında bir ilişki olarak yazılabilir

$$Y_n(s_1, \dots, s_n) = H(s_1, \dots, s_n) U(s_1) \cdots U(s_n) \quad (20)$$

$$H(s_1, \dots, s_n) = L[h(t_1, \dots, t_n)] \quad (21)$$

homojen sisteminin çokdeğişkenli transfer fonksiyonu.

Yanıt hesaplanmasında çokdeğişkenli transfer fonksiyonunun programını bu noktada çok net. Ancak, $y(t)$ öncesi ters Laplace dönüşümü gerekir (19) ikinci denklemi adresinden bulunabilir ve hesaplanabilir. genellikle bu kolay değildir. Yanıt hesaplama daha da soruşturmaya devam etmeden önce, sistemlerin ara bağlantı konusunda çokdeğişkenli transfer fonksiyonu gösteriminin bazı basit özelliklerini tartışacağız. Bunu dönüşümü etki sistemi diyagramı Şekil 2.1 'de gösterildiği gibi kullanılacaktır.



Şekil 2.1

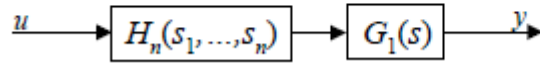
Çok değişkenli transfer fonksiyonu gösteriminin belki de en belirgin özelliği aynı derecede homojen sistemlerin paralel bağlantı içermesidir. genel transfer fonksiyonu da alt sistem transfer fonksiyonlarının denetimi tarafından yazılmış olabilir.

n.dereceden homojen sistemin kaskat bağlantısı olarak takip eden doğrusal bir sistem Şekil 2,2 gösterilmektedir.

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\sigma) h_n(t_1 - \sigma, \dots, t_n - \sigma) d\sigma \quad (22)$$

Böylece Teorem 2.3, bir sistem transfer fonksiyonu:

$$F_n(s_1, \dots, s_n) = H_n(s_1, \dots, s_n) G_1(s_1 + \dots + s_n) \quad (23)$$

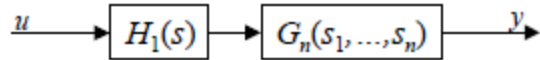


Şekil 2.3'te doğrusal bir sistemin, n.dereceden homojen sistemi takip eden bir bağlantısı gösterildi. Bölüm 1.4, çekirdek tarafından verilen komple bir sistem

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) h_1(t_1 - \sigma_1) \dots h_1(t_n - \sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n$$

Uygulama Teoremi 2, 4 bu ifade bir genel sistemin transfer fonksiyonunu gösterir.

$$F_n(s_1, \dots, s_n) = H_1(s_1) \dots H_1(s_n) G_n(s_1, \dots, s_n) \quad (25)$$



2.3 Yanıt Hesaplama ve İlişkili Dönüşüm

Çok değişkenli ters Laplace dönüşümü gerçekleştirmek için, tepki hesaplama prosedürü Örnek 2.8 kullanılır. Bundan Laplace çıkış sinyal dönüşümünün analiz fikrine dayanan alternatif bir yöntem, $Y(s_1, \dots, s_n)$ $Y(s)$ ye birleşmiş dönüşüm denir. Notasyonu şöyledir:

$$Y(s) = A_n[Y_n(s_1, \dots, s_n)]$$

Gösterim değişkenlerdeki operasyonları belirtmek için kullanılır.

Teorem 2.7

$$Y(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2(s-s_2, s_2) ds_2 \quad (32)$$

İspat

$$y_2(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2(s_1, s_2) e^{s_1 t_1} e^{s_2 t_2} ds_1 ds_2$$

$$t_1 = t_2 = t$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2(s_1, s_2) e^{s_1 t} ds_1 \right] e^{s_2 t} ds_2$$

$s = s_1 + s_2$ değişkenleri değiştirirsek

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2(s-s_2, s_2) e^{(s-s_2)t} ds \right] e^{s_2 t} ds_2$$

İntegresyon düzeni değiştirerek

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2(s-s_2, s_2) ds_2 \right] e^{st} ds$$

$Y(s) = L[y(t)]$ ispat tamam. bu farklı formüller integrallerin farklı düzenlerinden kaynaklanabilir.

$$Y(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_2(s_1, s-s_1) ds_1 \quad (33)$$

İki form aşağıda verilmiştir.

$$Y(s) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_n(s-s_2, s_2-s_3, \dots, s_{n-1}-s_n, s_n) ds_n \cdots ds_2 \quad (34)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_n(s-s_1-s_2-\cdots-s_{n-1}, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) ds_1 \cdots ds_{n-1} \quad (35)$$

Bu hesapları kurmak (34) ve (35) detayları da bir dizi olarak kabul edilebilir.

Teorem 2.8 eğer $F(s_1, \dots, s_n)$ in formu olarak yazılırsa $F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1, \dots, s_k)G(s_{k+1}, \dots, s_n)$

$$F(s) = A_n[F(s_1, \dots, s_n)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(s-s_1) G(s_1) ds_1 \quad (38)$$

Sonuç 2.1.

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{(s_k + \alpha)^{q+1}} G(s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n)$$

$$F(s) = \frac{(-1)^q}{q!} \frac{d^q}{ds^q} G(s+\alpha) \quad (40)$$

Sonuç 2.2.

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{\alpha}{s_k^2 + \alpha^2} G(s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n) \quad (41)$$

$$F(s) = \frac{1}{2i} [G(s-i\alpha) - G(s+i\alpha)] \quad (42)$$

Sonuç 2.3.

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{s_k}{s_k^2 + \alpha^2} G(s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n) \quad (43)$$

$$F(s) = \frac{1}{2} [G(s-i\alpha) + G(s+i\alpha)] \quad (44)$$

Teorem 2.9 $F(s_1, \dots, s_n)$ aşağıdaki formda yazılabilir

$$F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1 + \dots + s_n) G(s_1, \dots, s_n)$$

$$F(s) = H(s)G(s)$$

Teorem 2.10 n homojen sistemi formunun bir uygun, rasyonel düzenli transfer fonksiyonu tarafından açıklanan varsayımı:

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_n) = \frac{P(s_1, \dots, s_n)}{Q_1(s_1) \cdots Q_n(s_n)} \quad (53)$$

$Q_j(s_j)$ tek değişkenli polinom ise, giriş sinyali şu şekilde ifade edilir:

$$U(s) = \sum_{l=1}^r \frac{a_l}{s + \gamma_l} \quad (54)$$

$Y_1, \dots, Y_r$ farklı olduğundan sistemin cevabı aşağıdaki gibidir:

$$Y(s) = \sum_{l_1=1}^r \cdots \sum_{l_{n-1}=1}^r a_{l_1} \cdots a_{l_{n-1}} H_{reg}(s + \gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{n-1}}, s + \gamma_{l_2} + \cdots + \gamma_{l_{n-1}}, \dots, s + \gamma_{l_{n-1}}, s) U(s + \gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{n-1}}) \quad (55)$$

Kanıt: (52) deki integraller değerlendirilerek ve tek tek kalıntı hesabı kullanılarak kanıtlandı

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H_{reg}(s-s_1-\cdots-s_{n-1}, s-s_2-\cdots-s_{n-1}, \dots, s-s_{n-1}, s) \\ & \quad U(s-s_1-\cdots-s_{n-1}) U(s_{n-1}) ds_{n-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{P(s-s_1-\cdots-s_{n-1}, \dots, s-s_{n-1}, s)}{Q_1(s-s_1-\cdots-s_{n-1}) \cdots Q_{n-1}(s-s_{n-1}) Q_n(s)} \\ & \quad U(s-s_1-\cdots-s_{n-1}) U(s_{n-1}) ds_{n-1} \end{aligned}$$

Buradaki önemli olan nokta $1/Q_n(s)$ integralin paydasında $F(s-s_{n-1})G(s_{n-1})$ 'in dışında ayrı olarak hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{l_{n-1}=1}^r a_{l_{n-1}} H_{reg}(s-s_1-\cdots-s_{n-2}+\gamma_{l_{n-1}}, s-s_2-\cdots-s_{n-2}+\gamma_{l_{n-1}}, \\ & \quad \cdots, s+\gamma_{l_{n-1}}, s) U(s-s_1-\cdots-s_{n-2}+\gamma_{l_{n-1}}) \end{aligned}$$

Bu şekilde yazılabilir:

$$Y(s) = \sum_{l_{n-1}=1}^r a_{l_{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)^{n-2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H_{reg}(s-s_1-\dots-s_{n-2}+\gamma_{l_{n-1}}, s-s_2-\dots-s_{n-2}+\gamma_{l_{n-1}}, \\ \dots, s+\gamma_{l_{n-1}}, s) U(s-s_1-\dots-s_{n-2}+\gamma_{l_{n-1}}) U(s_1) \dots U(s_{n-2}) ds_{n-2} \dots ds_1$$

Kalıntı hesabı yapılarak:

$$Y(s) = \sum_{l_{n-2}=1}^r \sum_{l_{n-1}=1}^r a_{l_{n-2}} a_{l_{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)^{n-3}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H_{reg}(s-s_1-\dots+\gamma_{l_{n-2}}+\gamma_{l_{n-1}}, \\ \dots, s+\gamma_{l_{n-1}}, s) U(s-s_1-\dots-s_{n-3}+\gamma_{l_{n-2}}+\gamma_{l_{n-1}}) U(s_1) \dots U(s_{n-3}) ds_{n-3} \dots ds_1$$

2.4. Üstel Büyüme Yaklaşımı

Homojen sistemlerin dönüşümünün gösterimi doğru bir bakış açısı olduğunu doğrusal sistemlerin aşağıdaki özelliğinden kaynaklanır.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma \quad (56)$$

$u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$, tüm t'ler için tanımlıdır.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{\lambda(t-\sigma)} d\sigma \\ = \int_0^{\infty} h(\sigma) e^{-\lambda\sigma} d\sigma e^{\lambda t} \quad (57)$$

$h(t)$ 'nin tek taraflılığından görüşle alt limit 0 a yükselirse ve $h(t)$ transfer fonksiyonu ise:

$$y(t) = H(\lambda)e^{\lambda t}, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (58)$$

Aslında büyüyen bir üstel giriş sinyali sadece çıkış sinyali üretmek için bir doğrusal sistem tarafından ölçeklendirilir bazen doğrusal sistemlerin Öz fonksiyon özelliği denir. Ayrıca, büyüyen eksponensiyel bir doğrusal kombinasyonu için lineer sistemin yanıtı:

$$u(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p > 0 \quad (59)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i H(\lambda_i) e^{\lambda_i t} \quad (60)$$

Analog şekilde ilerleyeceğim $n > 1$ dereceden homojen denklemler için:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (61)$$

Okuyucu sistemin cevabını şu şekilde görecektir. $u(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0, t \in (-\infty, \infty)$

$$y(t) = H_n(\lambda, \dots, \lambda) e^{n\lambda t} \quad (62)$$

$H_n(s_1, \dots, s_n)$ transfer fonksiyonu olduğunda, $H_n(s_1, \dots, s_n)$ Çok değişkenli fonksiyonun tam karakterizasyonu $H_n(\lambda, \dots, \lambda)$ fonksiyonunun tek değişkenli fonksiyonunu içermez.

$$u(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (63)$$

$H_n(s_1, \dots, s_n)$ sistem transfer fonksiyonudur. Anlaşıyor ki çokdeğişkenli fonksiyonu tam bir karakterizasyonu $H_n(s_1, \dots, s_n)$:

Bu önemli özelliğin devamı olarak:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \prod_{j=1}^n [\alpha_1 e^{\lambda_1(t-\sigma_j)} + \alpha_2 e^{\lambda_2(t-\sigma_j)}] d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \sum_{k_1=1}^2 \cdots \sum_{k_n=1}^2 \left(\prod_{j=1}^n \alpha_{k_j} \right) \exp\left[\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j}(t-\sigma_j) \right] d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \\ &= \sum_{k_1=1}^2 \cdots \sum_{k_n=1}^2 \left(\prod_{j=1}^n \alpha_{k_j} \right) \\ &\quad \int_0^{\infty} h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \exp\left(-\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} \sigma_j\right) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} t\right) \\ &= \sum_{k_1=1}^2 \cdots \sum_{k_n=1}^2 \left(\prod_{j=1}^n \alpha_{k_j} \right) H_n(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n}) \exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} t\right) \end{aligned} \quad (64)$$

Bu çıkış ifadesi açısından bir çok eşitlik vardır.

$$\alpha_1^k \alpha_2^{n-k} G_{k,n-k}(\lambda_1, \lambda_2) \exp[(k\lambda_1 + (n-k)\lambda_2)t] \quad (65)$$

$$G_{k,n-k}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+\dots+k_n=2n-k}}^2 \cdots \sum_{k_n=1}^2 H_n(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n}) \quad (66)$$

Sitemin cevabı bu şekilde yazılabilir:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_1^k \alpha_2^{n-k} G_{k,n-k}(\lambda_1, \lambda_2) e^{[k\lambda_1 + (n-k)\lambda_2]t} \quad (67)$$

Sistemin derecesi $n=2$ ise şöyle ifade edilir:

$$G_{k,n-k}(\lambda_1, \lambda_2) = \binom{n}{k} H_{nsym}(\lambda_1, \dots, \lambda_k; \lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_n) \quad (68)$$

2.4 Polinom ve Volterra Sistemleri

Sabit polinom veya Volterra sistemlerinin temelde homojen alt sistemi transfer fonksiyonlarının dönüşümünü içerir. Volterra sistemler için bu toplam işlevlerin sonsuz serilerinin yakınsaklık özelliklerine dikkat edilmesini gerektirir. Yakınsama giriş özelliklerine bağlıdır, örneğin, giriş sinyalinin genliği üzerinde sınırları gibi.

Artan üstel yaklaşım transfer-fonksiyonu sabit polinom ve Volterra sistemleri için çok uygun bir araçtır. N üstel fonksiyonunu incelerken giriş sinyallerini toplamının N üstel ayırık ayırık fonksiyonu olduğunu kabul etmek gerekir. Çıkış artan üstel fonksiyonların toplamıysa $e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}$; $n! H_{nsym}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $n=1,2,3,\dots,N$ hesaba katılır.

BÖLÜM 3

FARKA BAĞLI-DENKLEM TANIMLAMALARINDAN GİRDİ/ÇIKTI TEMSİLLERİNİ ELDE ETMEK

Sistemler çoğunlukla, bir vektör bakımından tanımlanır, ilk-emir farklı olan denklemi, resmi denklemi çağırır. Bu yolda bir sistemin giriş çıktı davranışının, tanımladığı zaman, ilgiden midir, bir temsil, resmi denklemin çözümü, ihtiyaç duyulduğu için. Bu bölümde, çekirdekler veya transferi kararlaştırmak için birkaç prosedür, verilmiş resmi bir denkleme uyuyor olan bir Volterra Wiener temsilinde iş görür, tartışılacak. Genelde, sınırsız bir Volterra dizisi, gerektirilir, ve bu, yeniden bir noktada birleşmenin çıkışını kaldırır. Genel bir noktada birleşme sonuçlarının, bahsedilecek olmasına rağmen, tartışmanın çoğu, dolu Volterra sisteminin derece N polynomial-sistem budamalarını bulmak bakımından sözcük gruplu olacak. (Bir genel bir noktada birleşme sonucunun bir kanıtı, ek 3.1'de verilir.)

Çizgisel olmayan farka bağlı denklemlerle uğraşmakta büyük bir zorluk, o varlık ve veya çözümlerin benzersizliğidir, yerel bir histe düzenli, bahşedilen için alınamaz. Bazen meydana gelen kötü şeyler, çok basit gösterilebilir, innocentappearing örnekleri, ve ben, okuyucunun, durumdan iyi haberdar olduğunu varsayırım. Bütün bundan kaçınmak, o, kendisinin altında farka bağlı denklemlerin, herkesin, ilginin, özel ilk durum veya (Sözde piecewise-devamlı olmayı farz etti) giriş sinyali ne olursa olsun zaman arasında benzersiz çözümleri olduğunu çalıştığı farz edilecek. Bu, iyi büyümede koşulları bileni ifade eder, ve verilmiş farka bağlı bir denklemde çizgisel olmayan görevlerin düzgünlük malları, kontrol edilmeliydi, metotlar, Volterra Wiener temsilinde temel almadan önce, kullanılır. Aslında, onlar, kontrol edilmeliydi, herhangi bir metot, kullanılmadan önce.

Takip eden sayfalarda gelişmenin büyük kısmı, zaman-değişken parametrelerle farka bağlı denklemler bakımındandır, odur, durağan olmayan olay. Bu olayda ilgisiz okuyucu, isteyerek gelişme uzmanlaşabilir. Gerçekten, çok daha fazlası, doğru yerlerde düşünceleri düşürmekten gerektirilmez, ve değiştirmek $\Phi(t, \tau)$ ile $e^{A(t-\tau)}$.

3.1. Giriş

Konuya rahatlatmak, ben, bir tekniğin bir incelemesiyle çizgisel resmi denkleme uyuyor olan

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = c(t)x(t), \quad x(0) = x_0$$

bir giriş çıktı temsilini kararlaştırmak için başlarım. Bu ifadede $x(t)$, n-boyutlu resmi vektördür, $u(t)$, yönsüz giriştir, ve $y(t)$, yönsüz çıktıdır.

Tipik farzlar, $[0, T]$ bazı sınırlı zaman arasında o olacaktı, $a(t)$, $b(t)$, ve $c(t)$ devamlıdır ve giriş sinyali, sınırlanır, ve devamlı piecewise. Böyle farzlar, bütün $t \in [0, T]$ için (1)'in benzersiz bir çözümünün varlığına garanti vermek için yeterlidir. Bu standart sonuç genellikle, art arda gelen tahminden türetilir, o buna rağmen, burada gösterilmeyecek. Benim başlıca ilgim, çizgisel olmayan resmi denklemlere bir yaklaşıma göre fikir veren bir yolda (1)'e çözümün formunu almaktır.

İlk olarak bütün $t \geq 0$ için $u(t) = 0$ ile (1)'in çözümünü düşün. O taktirde, farka bağlı denklemin her iki kenarı

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\sigma_1)x(\sigma_1) d\sigma_1$$

elde etmek için bütünleştirilebilir. Bu ifadenin üzerinde temel alınan, tekrarlayan yer değiştirmeler, yapılabilir. Özellikle daha çok,

$$x(\sigma_1) = x_0 + \int_0^{\sigma_1} A(\sigma_2)x(\sigma_2) d\sigma_2$$

(4)

(3)

(6)

yazar, ve (2)'e elde etmek için yerine koyar

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\sigma_1) d\sigma_1 x_0 + \int_0^t A(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} A(\sigma_2) x(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1$$

(4)'de $x(\sigma_2)$ için yerine koyarak (3) formun bir ifadesini kullanırken devam etmek, verir

$$\begin{aligned} x(t) = & [I + \int_0^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^t A(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1] x_0 \\ & + \int_0^t A(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} A(\sigma_2) \int_0^{\sigma_2} A(\sigma_3) x(\sigma_3) d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$

Belirsizce bu süreci tekrarlamak, ve son terimin, (Normda) düzenli bir yolda 0'a yaklaştığını göstermek,

$$x(t) = \Phi(t, 0) x_0$$

geçiş matrisinin olduğu $\Phi(t, \tau)$ formda bir çözümü verir $[0, T] \times [0, T]$ herhangi bir sınırlı karede düzenlice bir noktada birleşen Peano-Baker dizisi olarak bilinen dizi ile

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) = & I + \int_{\tau}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{\tau}^t A(\sigma_1) \int_{\tau}^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ & + \dots + \int_{\tau}^t A(\sigma_1) \int_{\tau}^{\sigma_1} A(\sigma_2) \dots \int_{\tau}^{\sigma_{k-1}} A(\sigma_k) d\sigma_k \dots d\sigma_1 + \dots \end{aligned}$$

tanımlan.

Devamında kullanılacak olan geçiş matrisinin önemli bir malı kökenin faydası olmadan, çarpım formülüdür

$$\Phi(t, \sigma) \Phi(\sigma, \tau) = \Phi(t, \tau)$$

$\Phi(t, \tau)$ her biri t 'de invertible ve τ olan gerçekte bağlaçta bu formül; Ver $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(t, \tau)$. Sonunda, gerçekte bir sabit matrisi $A(t)$, ne zamandır, bir, $\Phi(t, \tau)$ kesinlikle matris üstel olan $e^{A(t-\tau)}$ 'i göstermek için zor değildir. Sıfır giriş için (1)'in çözümü, olabilir, bir temsili elde ederdi, keyfi bir giriş sinyaliyle (1)'in çözümü olduğu için $u(t)$.

(10)

(11)

(8)

(14)

$\Phi(t, \tau)$, (T) her t ve τ için invertible olduğundan $z(t) = \Phi^{-1}(t, 0)x(t)$ 'e değişkenleri değiştir, ve (1) 'i tekrar

$$\dot{z}(t) = \hat{b}(t)u(t), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \hat{c}(t)z(t), \quad z(0) = x_0$$

gibi yaz,

$$\hat{b}(t) = \Phi^{-1}(t, 0)b(t)$$

$$\hat{c}(t) = c(t)\Phi(t, 0)$$

olduğu yerde.

(8) resmi denklemde, $A(t)z(t)$ formun hiçbir terimi yoktur, hangisi değişken değişikliğinin objektifiydi. Farka bağlı denklemin her iki kenarını içeride bütünleştirmek (8),

$$z(t) = x_0 + \int_0^t \hat{b}(\sigma)u(\sigma) d\sigma$$

orijinal değişkenler bakımından, hangisinin olduğu

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \sigma)b(\sigma)u(\sigma) d\sigma$$

'i verir. Böylece,

$$y(t) = c(t)\Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t c(t)\Phi(t, \sigma)b(\sigma)u(\sigma) d\sigma$$

$x_0 = 0$ 'ın olduğu olay için, 1- derece homojen giriş çıktı temsilinin

$$y(t) = \int_0^t h(t, \sigma)u(\sigma) d\sigma$$

$$h(t, \sigma) = c(t)\Phi(t, \sigma)b(\sigma)$$

(16)

(15)

(18)

çekirdekde elde edilmiştir. Üstelik, eğer $A(t)$, $b(t)$ ve $c(t)$ gerçekte, sabit matrislerse, sonra $\Phi(t, \sigma) = e^{A(t-\sigma)}$ 'dir, ve (13), bir kıvrım bütünü olur

$$h(t, \sigma) = h(t - \sigma) = ce^{A(t-\sigma)}b$$

Ben, bilinear durum denklemlerine bu aynı yer değiştirme yaklaşımını alarak çizgisel olmayan olayın dikkatini başlatacağım. Bu başlayan nokta, kısmen uygundur çünkü bilinear sınıfı durum denklemleri, kendisi için çekirdekler için genel bir formun, elde edildiği çizgisel olmayan denklemlerin ilk olarak geniş sınıfıydı — ve kısmen çünkü genel form, matematiğe ait güzelliğin bu kadar görkemli örneğidir. Üstelik, o, bilinear olayının davranışının, daha genel gelişmelere bir haberci olduğu daha geç kısımlarda açık bir şekilde olacak.

Bir bilinear durum denklemi,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)x(t)u(t) + b(t)u(t)$$

$$y(t) = c(t)x(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0$$

formun bir vektör farklı olan denklemidir, nere, önce olduğu gibi, $x(t)$, $n \times 1$ 'dir, $u(t)$ olurken, ve $y(t)$, yönsüz niceliklerdir. (16) için tipik farzlar, aynen çizgisel olayda olduğu gibidir. Problem 3.9'da, okuyucu, bu farzların, herhangi bir sınırlı zaman arasında benzersiz bir çözümün varlığına garanti verdiğini göstermesi için art arda gelen tahmin kanıtının olduğu astandardı taklit etmek için davet edilir.

$z(t) = \Phi^{-1}(t, 0)x(t)$ değişken değişikliği kullanmak, geçiş matrisi $\Phi(t, \tau)$, $A(t)$ 'e nereye uyuyor (16):

$$\dot{z}(t) = \hat{D}(t)z(t)u(t) + \hat{b}(t)u(t)$$

$$y(t) = \hat{c}(t)z(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0$$

'in basitleştirilen bir formunu verir,

$$\hat{b}(t) = \Phi^{-1}(t, 0)b(t)$$

$$\hat{D}(t) = \Phi^{-1}(t, 0)D(t)\Phi(t, 0)$$

$$\hat{c}(t) = c(t)\Phi(t, 0)$$

olduğu yerde. Giriş çıktı temsilinin formunu bulmak için çizgisel olay, teknikte olduğu gibi sadece, (17) farka bağlı denklemin her iki kenarını içerde bütünleştirmektir, ve sonra $z(t)$ için tekrar yerine koyar. Prosedürün ilk adımı, verir (20)

$$z(t) = z_0 + \int_0^t \hat{D}(\sigma_1) z(\sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^t \hat{b}(\sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1$$

Bu aynı formun bir ifadesini kullanırken $z(\sigma_1)$ için yerine koymak,

$$\begin{aligned} z(t) = & z_0 + \int_0^t \hat{D}(\sigma_1) z_0 u(\sigma_1) d\sigma_1 \\ & + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \hat{D}(\sigma_1) \hat{D}(\sigma_2) z(\sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ & + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \hat{D}(\sigma_1) \hat{b}(\sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \int_0^t \hat{b}(\sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1 \end{aligned}$$

(19) formun bir ifadesini kullanırken (20)'de $z(\sigma_2)$ için yerine koymak, ve bu biçimde devam etmek, verir, $N - 1$ adımlardan sonra,

$$\begin{aligned} z(t) = & z_0 + \sum_{k=1}^N \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_k) z_0 u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1 \\ & + \sum_{k=1}^N \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_{k-1}) \hat{b}(\sigma_k) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1 \\ & + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{N-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_N) z(\sigma_N) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_N) d\sigma_N \cdots d\sigma_1 \end{aligned}$$

Gerçekte notasyon içerde (21)'dir, $k = 1$ için birazcık yoksul, toplamalarda adlandırır. Daha açık bir ifade, olacaktır

(22)

$$\begin{aligned}
z(t) = & z_0 + \int_0^t \hat{D}(\sigma_1) z_0 u(\sigma_1) d\sigma_1 \\
& + \sum_{k=2}^N \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_k) z_0 u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1 \\
& + \int_0^t \hat{b}(\sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1 \\
& + \sum_{k=2}^N \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_{k-1}) \hat{b}(\sigma_k) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1 \\
& + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{N-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_N) z(\sigma_N) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_N) d\sigma_N \cdots d\sigma_1
\end{aligned}$$

Yine de, ekonominin sebepleri için ben, çöken uyarlamayı içeride kullanmaya devam edeceğim (21).

Denklem (21), birçok yolda çizgisel olayda (5)'e benzerdir, ve o, o herhangi bir sınırlı zaman arasında düzenli bir yolda (21) yaklaşımlar 0'ında son terime gösterilebilir. Herhangi bir sınırlı zaman arasında bilinear durum denkleminin çözümü bu yüzden, düzenlice bir noktada birleşen (Vektör) Volterra dizisi ile temsil edilebilir:

$$\begin{aligned}
z(t) = & z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_k) z_0 u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1 \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} \hat{D}(\sigma_1) \cdots \hat{D}(\sigma_{k-1}) \hat{b}(\sigma_k) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1
\end{aligned}$$

(3.12 ve 3.13 problemler, akılcıca bir noktada birleşme malını gösterir (22).)

Orijinal değişkenlere çıktı denklemi ve arkada değiştirmeyi birleştirmek,

$$\begin{aligned}
y(t) = & c(t)\Phi(t, 0)x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} c(t)\Phi(t, \sigma_1)D(\sigma_1)\Phi(\sigma_1, \sigma_2) \cdots \\
& \cdots D(\sigma_k)\Phi(\sigma_k, 0)x_0 u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1 \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{k-1}} c(t)\Phi(t, \sigma_1)D(\sigma_1)\Phi(\sigma_1, \sigma_2)D(\sigma_2) \\
& \cdots D(\sigma_{k-1})\Phi(\sigma_{k-1}, \sigma_k)b(\sigma_k)u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_k \cdots d\sigma_1
\end{aligned}$$

hem de düzenlice herhangi bir sınırlı zaman arasında bir noktada birleşen Volterra sistem temsilini verir.

İlk duruma yalnız güvenen (23): onlarda koşulların üç türü vardır, girişe yalnız güvenenler, ve onun, her ikisine güvendiği onlar. Odur, çizgisel olaydan farklı, yanıt, basitçe zorunlu ve zorunlu olmayan yanıtların toplamı değildir. Eğer her $t \geq 0$ için, $u(t) = 0$ ise, bilinear durum denklem bakışları, çizgisel resmi bir denklemi beğenir, ve yanıtın, uygun aşına formu var. Eğer $x_0 = 0$ ise, giriş çıktı davranışı, makulce basit bir Volterra sistemi ile tanımlanır. Sonunda, eğer $x_0 \neq 0$ ayarlanırsa, giriş çıktı davranışı yeniden, bir Volterra sistemi ile tanımlanır, ama çekirdekler, özel değere güvenir x_0 .

O, çizgisel olmayan bir sistemin giriş çıktı davranışının, sistemin ilk durumunda biraz karışık bir yolda bağlı olduğunu fazla şaşırtıyor olmamalıydı. Tutturulmuş ilk durumla, (23), bir dereceyle bir Volterra sistem temsilidir, belirtilen bir zaman görevi olan 0 terimdir, ve daha yüksek-derece koşullarının çekirdekleriyle tamamen belirtilen. Yine de, o genellikle, yeni değişkenlerde sıfır ilk durumun seçeneğine izin vermek için bilinear durum denkleminde değişken bir değişikliği tanıştırmak için en rahattır. Bu, daha genellikle beklemeksizin tartışılacak, şimdinin dışında basit örnekler, değişken-değişiklik fikirlerinin, nasıl yerine getirilebildiğini gösterecek.

Örnek 3.1. Sıklığı oluşturmak için direkt metot, ayarladı (FM) sinyaller, bir voltajın, osilatörü kontrol ettiğini kullanmaktır. Odur, bir armonik osilatörünün sıklığı, bir mesaj sinyali gereğince değiştirilir $u(t)$. Temel farka bağlı denklem modeli,

$$\ddot{y}(t) + [\omega^2 + u(t)]y(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

$y(t)$ nerede oluşturulan FM sinyal olduğudur. Bu model,

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

elde etmeyi koyarak resmi denklem formunda yazılabilir

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} z(t)u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] z(t), \quad z(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi, kendisi için ilk durumun, sıfır giriş yanıtını çıkararak 0 olduğu yeni resmi bir denklem tanımlamasını tanıtır. $u(t) = 0$ için,

$$z(t) = e^{At} z_0 = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

böylece izin ver

$$x(t) = z(t) - \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$x(t)$ 'nin terimlerinde diferansiyel denklem yazmak

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t)u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\omega} \sin(\omega t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] x(t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad x(0) = 0$$

verir. Denklem (23)'teki sonuçları bu bilineer durum denklemine, ilk iki üç köşeli çekirdeğin

$$h(t, \sigma_1) = \frac{-1}{\omega^2} \sin[\omega(t - \sigma_1)] \sin(\omega \sigma_1) \delta_{-1}(t - \sigma_1)$$

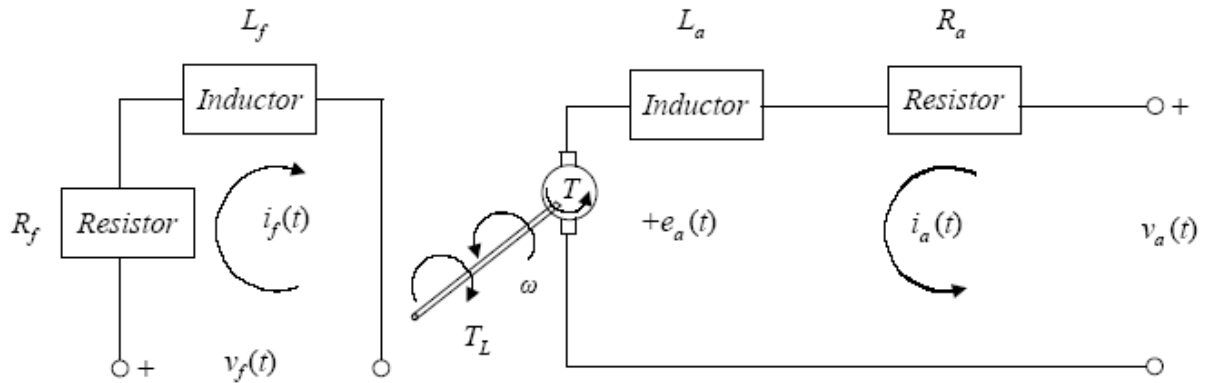
$$h(t, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\omega^3} \sin[\omega(t - \sigma_1)] \sin[\omega(\sigma_1 - \sigma_2)] \sin(\omega \sigma_2) \delta_{-1}(t - \sigma_1) \delta_{-1}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

olduğu yerde, uygulamak

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + \int_0^t h(t, \sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1 \\ + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} h(t, \sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots$$

üretir.

Örnek 3.2 bilinear durum denkleminin formüle etmesinin başka bir resimlemesi olarak, yapar, ve çekirdeklerin hesabı, ideali düşünür, ayrı olarak heyecanlandırdı, figür 3.1'de direkt-güncel motor diyagramlı.



Şekil 3.1. Bir ideal DC motoru.

Alan devirinin farka bağlı denklem tanımlaması,

$$\frac{d}{dt} i_f(t) = -\frac{R_f}{L_f} i_f(t) + \frac{1}{L_f} v_f(t)$$

Armatür devirinin temel karakteristikleri, daha fazla açıklamayı gerektirir. Sözde oluşturulan voltaj $e_a(t)$, alan akımı ve motor hızının ürününe orantılıdır:

$$e_a(t) = K i_f(t) \omega(t)$$

Motor ile oluşturulan manyetik tork, alan ve armatür akımlarının ürününe benzer şekilde orantılıdır:

$$T(t) = K i_f(t) i_a(t)$$

Böylece, armatür deviri,

$$\frac{d}{dt} i_a(t) = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K}{L_a} i_f(t) \omega(t) + \frac{1}{L_a} v_a(t)$$

ile tanımlanır, ve mekanik yük sistemi, TL'in, mekanik yük torku olduğu

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = \frac{K}{J} i_f(t) i_a(t) - \frac{1}{J} T_L$$

geçerek tanımlanır, ve J, ataletin anıdır.

Hız için basit bir metot, kontrol eder, bir DC motorunda, armatür voltaj sabitini tutmaktır, $v_a(t) = V_a$, ve $i_f(t)$ alan devirinde değişken bir direnç yoluyla ben alan akımını kontrol eder.

Özel bir olayda bu planı temsil etmek, gevşeten bir alet olarak motor yük işlerini varsayar. Odur, $T_L = B\omega(t)$ 'i varsayar, B'in, nerede ağıdalı gevşeten katsayı olduğu. (Örneğin, motor, bir akışkan maddeyi karıştırıyor olabilir.) Sonra $u(t) = i_f(t)$ giriş, $y(t) = \omega(t)$ çıktı ve durum vektör

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

ile

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 \\ 0 & -B/J \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -K/L_a \\ K/J & 0 \end{bmatrix} x(t)u(t) + \begin{bmatrix} V_a/L_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [0 \quad 1] x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} i_a(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix}$$

tarafından tanımlanan sistemdir.

Bu bilinear durum denklemi, tamamen doğru tarafta sabit terimden dolayı (16)'in formunda değildir. Bu terimi çıkarmak, $x(0) = 0$ 'le farka bağlı denklemin çözümü $x_c(t)$ olmak ve izin

verir $u(t)$. Sonra olduğu (Bir) isteyerek doğrulanandır. Şimdi $z(t) = x(t) - x_c(t)$ izin ver, ve $z(t)$ için farka bağlı bir denklem : hesapla

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} \frac{V_a}{R_a}(1 - e^{-\frac{R_a}{L_a}t}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu, (16) standart formda bir bilinear durum denklem tanımlamasıdır, ve (23) yoluyla çözümün hesabı, açıktır. Örneğin, eğer ilk koşullar, 0sa, sonra ilk üç, üç köşeli çekirdeklerin, olduğu

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 \\ 0 & -B/J \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 & -K/L_a \\ K/J & 0 \end{bmatrix} z(t)u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ (KV_a/JR_a)(1 - e^{-(R_a/L_a)t}) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] z(t), \quad z(0) = \begin{bmatrix} i_a(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

'dir.

3.2. Notasyonda bir uzaklaşma.

Daha genel çizgisel olmayan farka bağlı denklemler olarak düşünül, notational karmaşıklıkları, gözükmeye başlar. Bunlar, birkaç değişken ve onların güç dizi genişlemelerinin görevleriyle yapmak zorunda. Zorluklar muhtemelen, alışılmamış değildir, ama onların kararlılığı (Tensor) ürünler burada Kronecker bakımından, biraz nadirdir, bu yüzden bu uzaklaşma.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrisler için, sırasıyla boyut $n_a \times m_a$ ve $n_b \times m_b$, Kronecker ürünü, geçerek tanımlanır

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m_a}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a1}B & \cdots & a_{n_a m_a}B \end{bmatrix}$$

(30)

(36)

(29)

Açık bir şekilde $A \otimes B$ 'in, $n_a n_b \times m_a m_b$ boyutu olduğudur, ve herhangi bir iki matrisin, bu ürüne göre itaatkar olduğu. Kronecker ürünü, associative öyledir ki $(A \otimes B) \otimes C$ belirsizlik olmadan yazılır. Takip eden ilişkiler, kolayca kanıtlanmıştır, sıradan matris toplaması ve çarpıma göre uyulabilirliği farz etmek.

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$$

aslında bu mallar, Kronecker ürününün, matris toplaması ve çarpımdan daha yüksek bir öncelik verildiğinden beri daha basit formlarda yazılabilir:

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D$$

$$(AB) \otimes (CD) = A \otimes C \cdot B \otimes D$$

Kanıtlamak için sert olmayan ekstra mallar, aşağıda listelenir.

Özellik 1 Ürün $A \otimes B = 0$, eğer ve ancak, $A = 0$ ve $B = 0$.

Özellik 2 Eğer, A ve B, invertibledir, sonra $A \otimes B$, invertible ve $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Özellik 3 Eğer $A = r_a$ sıraya, ve $B = r_b$ sayar, sonra sayar $A \otimes B = r_a r_b$.

Kronecker ürün notasyonu, polynomials için kullanılacak, veya birkaç değişkende güç dizisi.

Örneğin, eğer $f: R^n \rightarrow R^m$ ise, sonra $f(x)$ 'in güç-dizi genişlemesi $x = 0$ etrafta,

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x \otimes x + F_3 x \otimes x \otimes x + \dots$$

her biri F_i 'nin, özel olmak, nerede uygun boyutun bir katsayı matrisi olduğu $(m \times n^i)$ yazılır.

Ben genellikle, biraz $x^{(i)} = x \otimes \dots \otimes x$ (i terimleri) koyarak notasyonu basitleştireceğim, ve yazarak

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^{(i)}$$

Daha yakın bir bakışı almak, lüzumsuzluklar olduğunu gösterir, bu notasyonda sakladı.

Özellikle $x^{(i)}$, bir $n^i \times 1$ vektörüdür, ama tek $\begin{bmatrix} n+i-1 \\ i \end{bmatrix}$ girişleri, ayırdır.

Örneğin, yazmak, boşluğu kurtarmayı yer değiştirir, eğer

(33)

(34)

(36)

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3] \quad (34)$$

sonra

$$x^{(2)} = [x_1^2 \ x_1x_2 \ x_1x_3 \ x_2x_1 \ x_2^2 \ x_2x_3 \ x_3x_1 \ x_3x_2 \ x_3^2]$$

lüzumsuzluk, tekrarlayan girişler ve kullanmayı silerek çıkarılabilseydi, de, kalan için emrederken bir lexicographic.

Sonuç için bir kare-parantez notasyonunu benimsemek, bu prosedür,

$$x^{[2]} = [x_1^2 \ x_1x_2 \ x_1x_3 \ x_2^2 \ x_2x_3 \ x_3^2]$$

verir, birçok maksat olduğu için, bu azaltılan Kronecker ürünü, tercih edildir çünkü boyutlar, daha küçüktür.

Yine de, bazı açıklık, genel hesapların, yapıldığı zaman boyutun ekonomisi için feda edilir. Örneğin, varsay, $n \times n$ ve $y = Ax$ mı.

Sonra

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= y \otimes y = (Ax) \otimes (Ax) \\ &= A \otimes A \ x \otimes x \\ &= A^{(2)} x^{(2)} \end{aligned}$$

Orada,

$$y^{[2]} = A^{[2]} x^{[2]}$$

başka bir örnek olarak A .'in açık koşullarında $A^{[2]}$ yazmak için zor olduğu bir (Daha küçük boyut) matrisi $A^{[2]}$ böyle var olduğu açık olurken,

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \ x(0) = x_0$$

yeniden A bir $n \times n$ matrisiyle çizgisel farka bağlı denklemi düşün.

$$\frac{d}{dt} [x^{(2)}(t)] = \dot{x}(t) \otimes x(t) + x(t) \otimes \dot{x}(t)$$

$x^{(2)}(t)$ için farka bağlı bir denklemin,

$$\frac{d}{dt} x^{(2)}(t) = [A \otimes I_n + I_n \otimes A] x^{(2)}(t), \quad x^{(2)}(0) = x_0^{(2)}$$

$n \times n$ kimliğidir formda yazılabildiği ürün kuralını doğrulamaktan sonra. Onun, $x^{[2]}$ hem de çizgisel farka bağlı bir denklem, ve daha aşağı boyutun birini tatmin eden gösterilebilmesine rağmen, A. bakımından açıkça katsayı matrisini yazması için hiçbir açık yol yoktur (Olması beklenince, notasyon, $\dot{x}^{(2)}(t)$ 'in, iyi sebep için kaçınılmış oluyor olduğudur. $(\frac{d}{dt})[x^2(t)]$ 'in, $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\right]^{(2)}$ 'den çok farklı olduğunu fark et, ve böylece nokta notasyonu, belirsizliğe yönelir.)

Bu farka bağlı denklem örneği, adil notational sebeplerinden daha çoğu için ilgidendir. Ne gösterildi ki eğer $x(t)$, çizgisel farka bağlı bir denklemi tatmin ederse, sonra, bundan dolayı yap $x^{(2)}(t)$. Açıkça, bu düşünce, $x^{(k)}(t)$ çizgisel farka bağlı bir denklemi tatmin edeni göstermek devam edilebilir $k = 3, 4, \dots$. Çok benzer bir gözlem, anahtarı sağlar, kısım 3.3'te tartışılması için metotlar olduğu için. Bu dikkatlerin sonucu, benim, bu bölümde genel gelişmeler için Kronecker ürün notasyonunu kullanacak olduğumdur. Yine de, açık bir şekilde daha tutumlu notasyonun, açıklıkta birlikte olan bir kayıpla yerine koyulabildiğidir. Daha fazla gitmek, basit örneklerde o muhtemelen, hem bu özel notasyonları bırakmak için kazançlıdır, hem de serbest çalışmak.

3.3. Carleman Linearization Yaklaşımı

Çekirdekleri hesaplamak için Carleman linearization metodu, ilk olarak

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) + b(x(t), t)u(t), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = c(x(t), t), \quad x(0) = x_0$$

$x(t)$ 'nin $n \times 1$ resmi vektör ve $u(t)$ giriş ve $y(t)$ çıktının yönsüz sinyaller olduğu yerde formun resmi denklemlerinin bağlamında düşünülecek. Bu özel formula başlamak için bir

sebepe, uygun çekirdeklerin, uyarıları içermemiştir. Bu, onun olduğu gerçeğin direkt bir sonucudur, giriş içeride (40), çizgiselce gözükür. Kısım sonuna doğru ben, bu kısıtlamayı çıkaracağım, ve kısaca daha genel bir olayı tartışacağım.

Form için başka bir sebep içeride (40), bir noktada birleşen bir Volterra sistem temsiliinin varlığının, genel hipotezlerin altında garanti verilebildiğidir. $a(x, t)$, $b(x, t)$ ve $c(x, t)$ fonksiyonlarının x 'de analitik ve t 'de devamlı olduğunu varsay, (40) çizgisel-analitik resmi bir denklem hangi olayda çağırılır. Sonra çeşitli metotlar, olabilir, takip edeni kurardı, biraz gevşekçe belirtti, sonuç verir. (Teknikleri kullanıyor olan bir kanıt, tartıştı, kısım 3.4'te, ek 3.1'de verilir.).

Teorem 3.1 Zorunlu olmayan çizgisel-analitik resmi denkleme bir çözümün, için var olduğu $t \in [0, T]$ 'i varsayar. Orada sonra, bir $\varepsilon > 0$ böyle var olur ki orada $|u(t)| < \varepsilon$ 'i tatmin ediyor olan bütün girişler için, üzerinde bir noktada birleşen $[0, T]$ resmi denklem için bir Volterra sistem temsiliidir.

Uygun sonuçla bunu kıyaslamak için ilginçtir, bilinear durum denklemleri olduğu için. Çizgisel-analitik resmi denklemler için, bir noktada birleşen bir Volterra sistem temsiliinin varlığı, sadece garanti verilir, yeterince küçük giriş, işaret ettiği için, bilinear durum denklemleri için giriş sinyalleri, ihtiyaç duyarken, sadece, sınırlan.

Çekirdekleri gerçekte hesaplamakta ilk adım, daha basit bir forma resmi denklemini koymak için bazı değişken değişiklikleri yapmak olacak. Bunlar, zorunlu değildir, ama onlar, müteakip kökeni daha az telaşlı yapar. Olması beklenince, açık bir şekilde böyle değişken değişikliklerin, her zaman büyük bir fikir olduğu değildir. Ne zaman özel problemler veya örneklerle uğraşmak, önemli özellikler, gizlenebilir. Ama ben, kökenlerin basitliğini sürdürmeye veririm, Volterra sistem temsiliinin formunun, değişken değişiklikler olmadan türetilmediği yorumla.

İlk basitleştirme, görevin $c(x, t)$ içeride (40), genelliğin küçük kaybıyla x 'de çizgisel olmak alınabildiği odur. Kendisiyle $c(x, t)$ devamlı olarak $y(t)$ için t 'te farklı olan farzın altında çıktı denklemini ayırmak,

(42)

$$\dot{y}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} c(x, t) \right] \dot{x}(t) + \frac{\partial}{\partial t} c(x, t) \quad (41)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} c(x, t) \right] [a(x, t) + b(x, t)u(t)] + \frac{\partial}{\partial t} c(x, t)$$

için farka bağlı bir denklemi verir $y(0) = c(x_0, 0)$ ile. (41)'in doğru tarafından çizgisel-analitik forma sahip olduğu için, $y(t)$, $x(t)$ 'in altına yeni bir vektörü oluşturmak için bitişik olmuş olabilir $\hat{x}(t)$. Sonra resmi denklem,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{a}(\hat{x}(t), t) + \hat{b}(\hat{x}(t), t)u(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$y(t) = \hat{c}(t)\hat{x}(t), \quad t \geq 0$$

$\hat{x}(t)$ bir $(n+1) \times 1$ vektörüdür formda yazılabilir. Bu olayda $\hat{c}(t) = [0 \cdots 01]$. Ben hem de, onu farz edeceğim, $u(t) = 0$ 'la farka bağlı denklemin çözümünün içerde (42) olduğu $\hat{x}(t) = 0$. Bunu göstermek, genelliğin hiçbir kaybını gerektirmez, onu varsayar, $u(t) = 0$ için yanıt, $x_0(t)$ 'dir. Sonra $\bar{x}(t) = \hat{x}(t) - x_0(t)$ koyarken, (42), formda yazılabilir

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}_0(t) \\ &= \hat{a}(\hat{x}(t), t) + \hat{b}(\hat{x}(t), t)u(t) - \hat{a}(x_0(t), t) \\ &= \hat{a}(\bar{x}(t) + x_0(t), t) + \hat{b}(\bar{x}(t) + x_0(t), t)u(t) - \hat{a}(x_0(t), t) \\ &= \bar{a}(\bar{x}(t), t) + \bar{b}(\bar{x}(t), t)u(t) \\ y(t) &= \hat{c}(t)\bar{x}(t) + \hat{c}(t)x_0(t), \quad \bar{x}(0) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

uygun tanımlarıyla yazılabilir $\bar{a}(\bar{x}, t)$ ve $\bar{b}(\bar{x}, t)$. Böylece, notasyonu basitleştirmek, formun resmi denklemleri

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) + b(x(t), t)u(t), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = c(t)x(t) + y_0(t), \quad x(0) = 0$$

düşünülecek. $x(t)$, $n \times 1$ resmi bir vektör buradadır, $u(t) = 0$, $x(t) = 0$ ve $y(t) = y_0(t)$ ima eder, ve $a(0, t) = 0$ değişken değişiklikten dolayı, çalıştırdı. O, bu son değişken değişiklik için ödemesi için bir bedel olduğu not edilmeliydi. Yani, zorunlu olmayan çözüm $x_0(t)$, basitleştirilen farka bağlı denklemin doğru tarafını içeride elde etmek için hesaplanmalıdır (43). Bu, zorunlu olmayan sistemin, içeride $x(t)$ çizgisel olduğu zaman sert bir problem olamazken, açıkça daha genel bir durumda $x_0(t)$ 'in hesaplaması, keyfi olarak zor olabilir. Amaç şimdi, için derece boyunca koşulları bir polynomial giriş çıktı ifadesinin N 'ne kararlaştırmaktır (43). Odur, formun bir giriş çıktı temsilini kararlaştırmak

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_1 \cdots d\sigma_k$$

Tabii, genelde orada, içeride görmezlikten gelmiş olan (44) daha yüksek derecenin koşulları olacak. Resmi denklemin (43), bir noktada birleşen bir Volterra sistemi olarak (Koşulların altında, daha önce belirtti) temsil edilebildiğinden beri, dizinin bir polynomial budaması, yeterince küçük olan girişler için doğru bir tahmin olacak.

Gerçekte, polynomial sistem temsilini kararlaştırmak için düşünülmesi için metot, için bir polynomial temsilini oluşturur $x(t)$. Odur, vektör çekirdeklerinin bir takımı, formun bir ifadesi için kararlaştırılır

$$x(t) = \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_k) d\sigma_1 \cdots d\sigma_k$$

Sonra, o zamandan beri $y(t)$, $x(t)$ 'in çizgisel bir görevidir, çekirdekler, giriş çıktı temsili, isteyerek hesaplanan olduğu için.

Carleman linearization metodu, (43) resmi denklemin doğru tarafının değiştirmesiyle güç dizi temsilleri ile başlar. Kronecker-ürün notasyonunu benimsemek,

$$a(x, t) = A_1(t)x + A_2(t)x^{(2)} + \cdots + A_N(t)x^{(N)} + \cdots$$

$$b(x, t) = B_0(t) + B_1(t)x + \cdots + B_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \cdots$$

koşulların, nerede göstermediğini yazar, gösterilen koşullardan x 'de daha yüksek derecedendir. Böylece, (43), kendisinin benim

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^N A_k(t)x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} B_k(t)x^{(k)}(t)u(t) + \dots \quad (46)$$

$$y(t) = c(t)x(t) + y_0(t), \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0$$

açıkça, derece boyunca koşulları $a(x, t)$ 'in genişlemesinde N 'e tuttuğum formda yazılır, ve $N - 1$ derece boyunca genişlemesinde adlandırır $b(x, t)$. Bu genişlemelerde daha yüksek-derecenin, adlandırdığı, katkıda bulunmayacak, ilk N çekirdeklerine, beklemeksizin görülecek. Temsil içeride (46), uygun ilk bir adımdır çünkü o, daha yüksek-derece koşullarıyla (46)'in çıktısının, sildiği gösterilebilir, $\hat{y}(t)$ onu çağırabilir, $u(t)$ herhangi bir giriş için, ne zaman, $y(t)$ yanıtı bu aynı giriş (43)'den kıyasladı,

$$|\hat{y}(t) - y(t)| \leq K\beta^{N+1}, \quad t \geq 0$$

K 'in, bir sabit, ve nerede olduğu

$$\beta = \max_{t \geq 0} |u(t)|$$

'i tatmin eder. Şimdi, $\hat{y}(t)$ ve $y(t) \alpha u(t)$ formun girişleri için yanıtları düşünür, α herhangi bir gerçek sayı olduğu yerde. Bu durumda,

$$|\hat{y}(t) - y(t)| \leq K |\alpha|^{N+1} \beta^{N+1}$$

bundan dolayı (Budamalar) $y(t)$ için polynomial temsillerinin olduğu o, ve $\hat{y}(t)$, (46)'e uyuyor olan ilk N çekirdeklerini kararlaştırması için N 'in olduğu derece boyunca aynı olmalıdır, farka bağlı bir denklem, $x^{(2)}(t)$ için geliştirilir, açık dikkatten düşürmek, yol boyunca dereceden N 'den daha büyük adlandırır.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[x^{(2)}(t)] &= \frac{d}{dt}[x^{(1)}(t) \otimes x^{(1)}(t)] = \dot{x}^{(1)}(t) \otimes x^{(1)}(t) + x^{(1)}(t) \otimes \dot{x}^{(1)}(t) \\
&= \left[\sum_{k=1}^N A_k(t)x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} B_k(t)x^{(k)}(t)u(t) \right] \otimes x^{(1)}(t) \\
&\quad + x^{(1)}(t) \otimes \left[\sum_{k=1}^N A_k(t)x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} B_k(t)x^{(k)}(t)u(t) \right] + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} [A_k(t) \otimes I_n + I_n \otimes A_k(t)] x^{(k+1)}(t) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-2} [B_k(t) \otimes I_n + I_n \otimes B_k(t)] x^{(k+1)}(t)u(t) + \dots, \quad x^{(2)}(0) = 0
\end{aligned} \tag{48}$$

Böylece $x^{(2)}(t)$, $x^{(1)}(t)$ için farka bağlı denklem olarak aynı genel forma içerde sahip olan (46) farka bağlı bir denklemi tatmin eder. Bu modada devam etmek, farka bağlı bir denklemi verir, notasyonla N dereceye $x^{(j)}(t)$ olduğu için formun

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[x^{(j)}(t)] &= \sum_{k=1}^{N-j+1} A_{j,k}(t)x^{(k+j-1)}(t) + \sum_{k=0}^{N-j} B_{j,k}(t)x^{(k+j-1)}(t)u(t) + \dots, \\
&\quad x^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

$A_{1,k} = A_k$ geçerek tanımladı, ve $j > 1$ için,

$$\begin{aligned}
A_{j,k}(t) &= A_k(t) \otimes I_n \otimes \dots \otimes I_n + I_n \otimes A_k(t) \otimes I_n \otimes \dots \otimes I_n \\
&\quad + \dots + I_n \otimes \dots \otimes I_n \otimes A_k(t)
\end{aligned}$$

(Her terimde ve j terimlerinde Kronecker ürünleri vardır.) Benzer bir notasyon, için kullanılır $B_{i,k}(t)$. Şimdi, önemli gözlem, koyarak odur

$$x^{\otimes}(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(N)}(t) \end{bmatrix}.$$

Ben, (49) daha yüksek-dereceyle (Bazı düşünceleri düşürmek) beraber büyük bilinear durum denkleminin, adlandırdığı gibi farka bağlı denklemlerin toplamasını içeride yazabilirim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^{\otimes} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ 0 & A_{21} & \cdots & A_{2,N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{3,N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{N1} \end{bmatrix} x^{\otimes} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,N-1} & 0 \\ B_{20} & B_{21} & \cdots & B_{2,N-2} & 0 \\ 0 & B_{30} & \cdots & B_{3,N-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{N0} & 0 \end{bmatrix} x^{\otimes} u + \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u + \cdots \\ y(t) &= [c(t) \ 0 \ \cdots \ 0] x^{\otimes}(t) + y_0(t) + \cdots, \quad x^{\otimes}(0) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

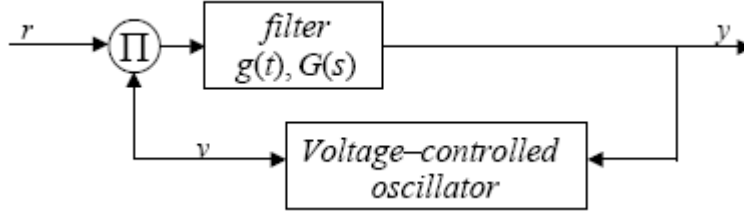
Bütün daha yüksek-derece koşullarını silmenin üzerinde, elipsler ile temsil etti, bu resmi denklem, çizgisel-analitik resmi denklemin budanan bir Carleman linearizationu içeride çağırılır (43). (O hem de, bir *bilinearization* (50) çağırmak için uygun olabilirdi (43).) Derece N polynomial temsili bulmak için ilkede açıktır, bilinear durum denkleminin giriş çıktı davranışı olduğu için (50). (50)'in giriş çıktı davranışından beri derecenin koşulları boyunca (43)'in olanla N 'i kabul et, derecenin polynomial temsili, (50) için N 'in, kesinlikle aynen o olarak için olduğu (43)'dir. Bu yaklaşımın, kısım 3.1'den (22) yoluyla üç köşeli formda bütün N çekirdeklerini verdiğini not et.

Örnek 3.3 FM sinyallerin demodülasyonu için evre-kilitlenen bir ilmi, figür 3.2'de diyagramlıdır. Giriş,

$$r(t) = \sin[\omega t + \phi_1(t)],$$

$$\phi_1(t) = \int_0^t u(\sigma) d\sigma$$

olduğu yerde bir FM sinyaldir Ve $u(t)$, (modülayon) mesaj sinyaldir.



Şekil 3.2. Bir faz-kilitli döngü.

Döngü filtresi, $G(s)$ transfer görevi ile tanımlanır, ve voltaj-kontrol edilen osilatör,

$$v(t) = 2K \cos [\omega t + \phi_2(t)] ,$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t y(\sigma) d\sigma$$

olduğu yerde ve $y(t)$ evre-kilitlenen ilmiğin çıktısıdır sinyali üretir. Çoğaltanın çıktısı sonra, iki koşuldan dayanır:

$$K \sin [2\omega t + \phi_1(t) + \phi_2(t)]$$

bir yüksek-sıklık terimi, ve bir alçak-sıklık terimi

$$K \sin [\phi_1(t) - \phi_2(t)] .$$

Döngü filtresinin, yüksek-sıklık terimini çıkardığını farz etmek, sinyal $e(t)$, alçak-sıklık teriminin olduğu tek içermek düşünülebilir. Odur,

$$e(t) = K \sin [\phi_1(t) - \phi_2(t)] = K \sin [x(t)]$$

evre hata sinyalinin $x(t)$, geçerek verildiği

$$x(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \int_0^t u(\sigma) d\sigma - \int_0^t y(\sigma) d\sigma$$

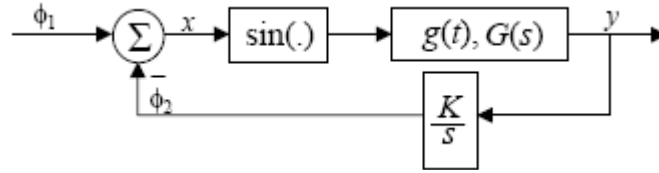
Sonra, hem de evre-kilitlenen döngünün çıktısı olan döngü filtresinin çıktısı,

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)e(\tau) d\tau$$

Evre hatasını tanımlayan bu ilişkilerden farka bağlı-gerekli bir denklem,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \phi_1(t) - \phi_2(t) = u(t) - y(t) \\ &= u(t) - \int_0^t g(t-\tau)K\sin[x(\tau)] d\tau\end{aligned}$$

Bu denklem, figür 3.3'te gösterilen modeli akla getirir. Ne zaman $x(t)$, döngünün, kilitlenmek için dendiği sıfırdır, ve $\phi_1(t) = \phi_2(t)$, or $y(t) = u(t)$.



Şekil 3.3. Faz-kilitlenmiş döngü için nonlinear bir model.

Modeli analiz etmekte zorluk, genellikle ilmi-filtre transfer görevinin doğasında $G(s)$ 'e bağlı olur. Basitlik için, ben, sözde ilk-emir evre-kilitlenen ilmiğin olduğu tek düşüneceğim, nerede $G(s) = 1$ (veya $g(t) = \delta_0(t)$). Sonra evre hatası için farka bağlı denklem tanımlaması,

$$\dot{x}(t) = -K \sin[x(t)] + u(t)$$

'e basitleştirir ve, eğer ilmi, kilitlenirse, $x(0) = 0$. Bu basit olayda çekirdekleri hesaplamak, genel notasyonu kullanması için hiçbir ihtiyaç yoktur. Farka bağlı denklem, denklem ile değiştirilebilir

$$\dot{x}(t) = -Kx(t) + \frac{K}{6}x^3(t) + u(t) + \dots$$

sadece ilk üç çekirdeğe katkıda bulunan o koşullar, açıkça nerede tutuldu. $x(t)$ o zamandan beri yönsüz nicelik için $x^{(j)}(t) = x^j(t)$, izin verir

$$x^{\otimes}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{bmatrix}$$

Sonra (50),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x^{\otimes}(t)] &= \begin{bmatrix} -K & 0 & K/6 \\ 0 & -2K & 0 \\ 0 & 0 & -3K \end{bmatrix} x^{\otimes}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} x^{\otimes}(t)u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \dots \end{aligned}$$

$$x(t) = [1 \ 0 \ 0] x^{\otimes}(t)$$

evre-hata sinyalinin, nerede resmi denklemin çıktısı olmak için alındığı olur. Kısa bir hesap,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-Kt} & 0 & (e^{-Kt} - e^{-3Kt})/12 \\ 0 & e^{-2Kt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3Kt} \end{bmatrix}$$

verir, ve (23)'den ilk üç, üç köşeli çekirdeklerin, olduğu

$$h(t, \sigma_1) = e^{-K(t-\sigma_1)} \delta_{-1}(t-\sigma_1)$$

$$h(t, \sigma_1, \sigma_2) = 0$$

$$\begin{aligned} h(t, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \frac{1}{2} [e^{-Kt} e^{-K\sigma_1} e^{K\sigma_2} e^{K\sigma_3} - e^{-3Kt} e^{K\sigma_1} e^{K\sigma_2} e^{K\sigma_3}] \\ &\quad \delta_{-1}(t-\sigma_1) \delta_{-1}(\sigma_1-\sigma_2) \delta_{-1}(\sigma_2-\sigma_3) \end{aligned}$$

'dir. (Ünite adım görevleri, bunların, üç köşeli çekirdekler olduğu onu sadece vurgulamak için oradadır.)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = h(x(t), t), \quad t \geq 0$$

formundaki durum denklemini bu bölümün yaklaşımını uzatmak $u(t)$ ve $y(t)$ 'nin yönsüz sinyal olduğu yerde sert değildir. Kesinlikle olmak, özellikle düzensizdir, ne zaman, ayrıntıda çalıştı, ama makineçiler, aşınadır. Denklemin bir güç dizi formu, elde edilir, ve sonra $x(t)$ 'i tanımlıyor olan vektör çekirdeklerinin bir takımı, hesaplanır çok aynı yolda öyle, yapıldı, bilinear durum denklemleri olduğu için. Ama şimdi u 'in üzerinde $f(x, u, t)$ in çizgisel olmayan bağımlılığı, çekirdeklerin, uyarıları içermeli olduğunu ifade eder. Saydam bir olay, neden olduğunu gösterecek.

Örnek 3.4

$$\dot{x}(t) = u^2(t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = x^3(t)$$

yönsüz resmi denklem için bütünleştirmenin dosdoğru, verdiği

$$x(t) = \int_0^t u^2(\sigma) d\sigma$$

Bir derece olarak bunu yazmak 2 homojen,

$$x(t) = \int_0^t \int_0^t h(t, \sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1$$

düşüncesiz çekirdeği gerektirir

$$h(t, \sigma_1, \sigma_2) = \delta_0(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Böylece, çıktı, açıkça sistemin, derece 6'ndan homojen olduğunu gösteren

$$y(t) = \int_0^t \delta_0(\sigma_1 - \sigma_2) \delta_0(\sigma_3 - \sigma_4) \delta_0(\sigma_5 - \sigma_6) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_6) d\sigma_6 \cdots d\sigma_1$$

(52)

(53)

geçerek verilir. (51)'de farka bağlı denkleme dönmek, ben, $f(0,0,t)$ onu farz ederim, ve, alışıldığı gibi, $f(0,0,t)$ kendisi için varlığın hakkında endişeler ve çözümlerin benzersizliğini çıkarmaya yeten $t > 0$ malları olduğu. Takip eden gelişmeyi tamamlamak için yeterli farklılık, farz edilecek, ve t 'in, kısmen düşürülecek olduğu düşünce çünkü hesaplar, aslında aynen durağan ve durağan olmayan olaylar içindir. Kronecker ürün notasyonunu kullanmak, derece $x = 0, u = 0$ boyunca $f(x,u)$ in genişlemesi N etrafta, formda yazılabilir

$$f(x,u) = F_{01}u + F_{02}u^2 + F_{03}u^3 + F_{10}x^{(1)} + F_{11}x^{(1)}u + F_{12}x^{(1)}u^2 \\ + F_{20}x^{(2)} + F_{21}x^{(2)}u + F_{22}x^{(2)}u^2 + \dots$$

Bu,

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N F_{ij}x^{(i)}u^j + \dots$$

olduğu $F_{00} = 0$ formun x için farka bağlı bir denklemi sağlar. $x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ için farka bağlı denklemleri geliştirmek için prosedür, önce olduğu gibi sadecedir. Şimdi, yine de,

$$x^{\otimes} = \begin{bmatrix} x \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{bmatrix}$$

için denklem, birkaç ekstra koşula sahip olacak:

$$\frac{d}{dt}x^{\otimes} = Fx^{\otimes} + G_1x^{\otimes}u + G_2x^{\otimes}u^2 + \dots + G_Nx^{\otimes}u^{N-1} + g_1u + \dots + g_Nu^N + \dots$$

Bu noktadan, fikir, bilinear olayında gelişmeyi taklit etmektir. F için geçiş matrisini karıştırırken değişkenlerin bir değişikliğini kullanmak, ve sonuç veren resmi denklemin her iki kenarını sonra bütünleştirmek, tekrarlayıcı yer değiştirme prosedürünü kurar. Tabii, burada daha birçok koşul vardır, ama, notasyonun bu düzeyinde, doğru formda homojen koşulları yazmak için prosedür ve sokma uyarılarını uygulamak, ilkede açıktır. Bu bir defa, yapıldı, dereceye çıktı denklemini N 'e genişletmek,

$$h(x) = y_0(t) + h_1x + h_2x^{(2)} + \dots + h_Nx^{(N)} + \dots$$

$$= y_0(t) + hx^{\otimes} + \dots$$

elipslerin silmesinin üzerinde bir polynomial giriş çıktı temsiline götürür. Bu son adımın, hiçbir şeyin daha çok, Kronecker ürününün mallarını kullanmaktan güçleştirmedeğini gerektirdiğini fark etmez. Özellikle hiçbir ekstra uyarı ihtiyacı, sokulmaz.

Örnek 3.5 Figür 3.4'te gösterilen çizgisel olmayan geri besleme sisteminin, yönsüz çizgiselliğin, (Veya güç dizileri)

$$h(x) = y_0(t) + h_1x + h_2x^{(2)} + \dots + h_Nx^{(N)} + \dots$$

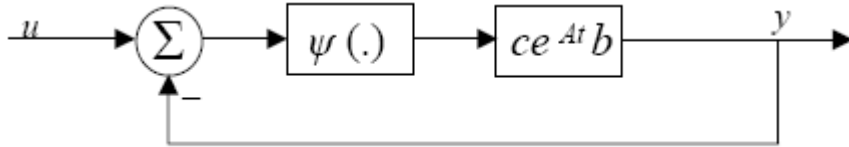
$$= y_0(t) + hx^{\otimes} + \dots$$

geçerek tanımlandığı

bir polynomial olduğu

$$\psi(\alpha) = \alpha + \psi_2\alpha^2 + \psi_3\alpha^3 + \dots$$

verde.



Şekil 3.4. Örnek 3.4 için nonlinear sistem.

Yaklaşımı sadece kullanmak, ana hatlarını çizdi, ben, kapalı-ilmik sistemi için ilk ve ikinci derece çekirdekleri hesaplayacağım. (53)'e uymak, koşullar, ihtiyaç duydu, ilk iki çekirdek,

$$x^{\otimes} = \begin{bmatrix} x \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$$

koymayı karıştırdığı için ve formun resmi bir denklemi ile verilmiş resmi denklemi değiştirmek

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x^{\otimes} &= Fx^{\otimes} + G_1x^{\otimes}u + g_1u + g_2u^2 + \dots \\ y &= hx^{\otimes}\end{aligned}$$

O, açık bir şekilde daha yüksek-derecenin, içeride adlandırdığı $x^{\otimes}$ olmalıydı Ve sen, ihtiyaç duyulmayacaksın. Üstelik, o, kendisi için farka bağlı denklemde çalıştırılıyor olan $x^{\otimes}$ genel notasyonun olduğunu kapatacak Öyle ilk iki çekirdeğin, ilgilendiği gibi gereksiz uzakta olan koşullar boyunca taşı. Özellikle, $x^{\otimes}$ için denklem $x^{\otimes} x, x^{(2)}, xu, x^{(2)}u, u$ ve u^2 ilgili terimleri içerir. $x^{(2)}u$ koşulları, ihtiyaç duyulmaz, ve 0'a katsayıları keyfi olarak koymak, meseleleri basitleştirebilir.

X için farka bağlı denklem, kendisine girmeyen $x^{\otimes}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b[(u-cx) + \psi_2(u-cx)^2 + \psi_3(u-cx)^3 + \dots] \\ &= (A-bc)x + bu + \psi_2bu^2 - 2\psi_2bcxu + \psi_2b(cx)^2 + 3\psi_3b(cx)^2u + \dots \\ (cx)^2 &= (cx) \otimes (cx) = c \otimes cx^{(2)}\end{aligned}$$

yazması için Kronecker ürün notasyonunu kullanıyor olan ve nokta koşullarına düşürüyor olan formda yazılabilir Denklem, verir

$$\dot{x} = (A-bc)x + bu + \psi_2bu^2 - 2\psi_2bcxu + \psi_2bc \otimes cx^{(2)} + 3\psi_3bc \otimes cx^{(2)}u + \dots$$

$x^{(2)}$ için farka bağlı bir denklemi geliştirmek, ürün kuralı, verir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x^{(2)}] &= \dot{x} \otimes x + x \otimes \dot{x} \\ &= [(A-bc) \otimes I + I \otimes (A-bc)]x^{(2)} + [b \otimes I + I \otimes b]xu \\ &\quad + \psi_2[b \otimes I + I \otimes b]xu^2 - 2\psi_2[bc \otimes I + I \otimes bc]x^{(2)}u + \dots\end{aligned}$$

Yeniden son sonuca katkıda bulunmayacak olan koşullar, düşürüldü. (53) bakımından böylece resmi denklem $x^{\otimes}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x^\otimes] &= \begin{bmatrix} A-bc & \psi_2 bc \otimes c \\ 0 & [(A-bc) \otimes I + I \otimes (A-bc)] \end{bmatrix} x^\otimes \\ &+ \begin{bmatrix} -2\psi_2 bc & 3\psi_3 bc \otimes c \\ [b \otimes I + I \otimes b] & -2\psi_2 [(bc) \otimes I + I \otimes (bc)] \end{bmatrix} x^\otimes u + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \psi_2 b \\ 0 \end{bmatrix} u^2 \\ y &= [c \quad 0] x^\otimes, \quad x^\otimes(0) = 0 \end{aligned}$$

Şimdi yer değiştirme prosedürü, uygulanabilir, sadece öyle, yapıldı, bilinear durum denklemleri olduğu için, uyarıların, doğru formun koşullarını elde etmek sokulmalı olduğu istisnaıyla. Üç köşeli çekirdeğin, hesabı

$$\begin{aligned} h(t, \sigma) &= h e^{F(t-\sigma)} g_1 \\ h(t, \sigma_1, \sigma_2) &= h e^{F(t-\sigma_1)} G_1 e^{F(\sigma_1-\sigma_2)} g_1 + h e^{F(t-\sigma_1)} g_2 \delta_0(\sigma_1-\sigma_2) \end{aligned}$$

tamamlamak için geçerek verildiği genel notasyonda ona göstermek için kolay ilk ikidir, bu çekirdekler, verilmiş resmi denklem bakımından onu göstererek ifade edilebilir

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{(A-bc)t} \int_0^t e^{(A-bc)(t-\sigma)} \psi_2 bc \otimes c e^{[(A-bc) \otimes I + I \otimes (A-bc)]\sigma} d\sigma \\ 0 \quad e^{[(A-bc) \otimes I + I \otimes (A-bc)]t} \end{bmatrix}$$

Sonra ilk iki, üç köşeli çekirdeğin, olduğu

$$\begin{aligned} h(t, \sigma) &= c e^{(A-bc)(t-\sigma)} b \delta_{-1}(t-\sigma) \\ h(t, \sigma_1, \sigma_2) &= [-2\psi_2 e^{(A-bc)(t-\sigma_1)} b c e^{(A-bc)(\sigma_1-\sigma_2)} b \\ &+ \psi_2 \int_0^{t-\sigma_1} c e^{(A-bc)(t-\sigma_1-\gamma)} b c \otimes c e^{[(A-bc) \otimes I + I \otimes (A-bc)]\gamma} d\gamma (b \otimes I + I \otimes b) e^{(A-bc)(\sigma_1-\sigma_2)} b \\ &+ \psi_2 c e^{(A-bc)(t-\sigma_1)} b \delta_0(\sigma_1-\sigma_2)] \delta_{-1}(t-\sigma_1) \delta_{-1}(\sigma_1-\sigma_2) \end{aligned}$$

'dir. Öyle başlangıçta bahsetti, $x^{(2)}$ karıştırıyor olan koşullar, diğer sözcüklerde, G_1 'in ikinci blok sütununda koşullar, sonuca girmez, ve basitlik için sıfıra koyulmuş olabilirdi.

3.4. Variational denklem yaklaşımı

(56)

Variational denklem yaklaşımında, bir resmi-denklemler tanımlaması, her derece için k elde edilir, giriş çıktı temsiliinde homojen subsystemdir. O, onu kapatır, k subsystemin, çizgiselce daha aşağı-derece için denklemlere subsystems birleşildiği derece için denklemin olmasına rağmen, denklemlerin her birinin, aynı birinci derece (Çizgisel) koşulları var. Böylece çeşitli çekirdekler, çizgisel-resmi-denklemler çözümünün, kısım 3.1'de incelediğini kullanmak hesaplanabilir. Önceki kısımda olduğu gibi, ben, kendisine

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) + b(x(t), t)u(t), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = c(t)x(t) + y_0(t), \quad x(0) = 0$$

$a(0, t) = 0$ olduğu çizgisel-analitik resmi denklemi düşünerek başlarım, bundan dolayı $u(t) = 0$ 'ye yanıt $x(t) = 0, y(t) = y_0(t)$. Analitiklik farzı, sadece çekirdeklerin sınırlı bir sayısının, hesaplanacak olduğundan beri zayıflatılabilir, ama burada basitlik için tutulur. Daha genel resmi denklemler zorunlu olmayan yanıtta özel farzlar olmadan, kısımda sonra tartışılır.

Homojen alt-sistem durum denklemleri, form α 'in girişlerine farka bağlı denklemin yanıtını içeride düşünerek (55) türetilir; $\alpha u(t)$ Keyfi bir yönsüz nicelik midir. Yanıt, parametrede bir genişleme olarak yazılabilir α Formdan (Mevcut bağlamda, subscripts, bir vektörün bileşenlerini göstermez.) Noktaların, içeride derecenin koşullarını N 'den daha büyük içerdiği α

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \cdots + \alpha^N x_N(t) + \cdots$$

Güç dizisi bakımından $a(x, t)$ ve $b(x, t)$ analitik görevleri görmek, (55)'e (56) yerine koymak, ve katsayılar güçleri gibi α 'i eşit saymak; $x_k(t)$ her biri için farka bağlı bir denkleme kurşun tabakalar, $x(t)$ 'in k derece bileşeni.

Carleman linearization yaklaşımında olduğu gibi sadece, ilk adım, (55) güç dizi temsilleri ile koşulları içeride değiştirmektir. Açıklamanın rahatlığı için, sadece ilk üç çekirdeğin hesabı,

davranılacak. Böylece resmi denklem (57), düşünülecek. $\alpha u(t)$ hem farz edilen giriş, hem de farz edilen yanıt içerde (56), yerine koyulur

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_1(t)x^{(1)}(t) + A_2(t)x^{(2)}(t) + A_3(t)x^{(3)}(t) \quad (59) \\ &+ B_0(t)u(t) + B_1(t)x^{(1)}(t)u(t) + B_2(t)x^{(2)}(t)u(t) + \dots \\ y(t) &= c(t)x^{(1)}(t) + y_0(t), \quad x^{(1)}(0) = 0, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

Kronecker ürünleri için hesabın kurallarından onu not et, olduğu

$$\begin{aligned}x^{(2)}(t) &= [\alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots] \otimes [\alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots] \\ &= \alpha^2 x_1^{(2)}(t) + \alpha^3 [x_1(t) \otimes x_2(t) + x_2(t) \otimes x_1(t)] + \dots \\ x^{(3)}(t) &= \alpha^3 x_1^{(3)}(t) + \dots\end{aligned}$$

yeniden, sadece derece 3'ü'nün koşulları veya daha az, açıkça tutulandır. (58)'den düşürülen x 'de daha yüksek derecenin koşulları, daha aşağı-derece koşullarına içerde katkıda bulunmayacaktı α . Odur, x 'in bir derece k görevine (56) yerine koymak, derecenin koşullarını k 'e verir, ve daha yüksek içerde α . Şimdi, (57), formda yazılabilir

$$\begin{aligned}\alpha \dot{x}_1(t) + \alpha^2 \dot{x}_2(t) + \alpha^3 \dot{x}_3(t) + \dots \\ &= \alpha A_1(t)x_1(t) + \alpha^2 [A_1(t)x_2(t) + A_2(t)x_1^{(2)}(t)] \\ &+ \alpha^3 [A_1(t)x_3(t) + A_2(t)(x_1(t) \otimes x_2(t) + x_2(t) \otimes x_1(t)) + A_3(t)x_1^{(3)}(t)] \\ &+ \alpha B_0(t)u(t) + \alpha^2 B_1(t)x_1(t)u(t) + \alpha^3 [B_1(t)x_2(t) + B_2(t)x_1^{(2)}(t)]u(t) + \dots, \\ \alpha x_1(0) + \alpha^2 x_2(0) + \alpha^3 x_3(0) + \dots &= 0\end{aligned}$$

Bu farka bağlı denklem için ve denklemden ilk durum, herkes için tutmalı olduğu için α Katsayılar, güçleri beğenir α Eşit sayılabilir. Bu, ilk üç variational denklemlerini verir:

(61)

(64)

$$\dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) + B_0(t)u(t), \quad x_1(0) = 0$$

(62)

$$\dot{x}_2(t) = A_1(t)x_2(t) + A_2(t)x_1^{(2)}(t) + B_1(t)x_1(t)u(t), \quad x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_3(t) = A_1(t)x_3(t) + A_2(t)[x_1(t) \otimes x_2(t) + x_2(t) \otimes x_1(t)]$$

$$+ A_3(t)x_1^{(3)}(t) + B_1(t)x_2(t)u(t) + B_2(t)x_1^{(2)}(t)u(t), \quad x_3(0) = 0$$

İlk denklem içerde (60), farka bağlı denklemin linearized uyarlaması içerededir (55).

$$w(t, \sigma) = \Phi(t, \sigma)B_0(\sigma)\delta_{-1}(t-\sigma) \quad (63)$$

$\Phi(t, \tau)$, $A_1(t)$ için geçiş matrisidir vektör çekirdeğini tanımlamak, temsili verir

$$x_1(t) = \int_0^t w(t, \sigma) u(\sigma) d\sigma$$

(60)'de ikinci denkleme devam etmek, terim $x_1^{(2)}$, formda yazılabilir

$$\begin{aligned} x_1^{(2)}(t) &= \left[\int_0^t w(t, \sigma)u(\sigma) d\sigma \right] \otimes \left[\int_0^t w(t, \sigma)u(\sigma) d\sigma \right] \\ &= \int_0^t \int_0^t w(t, \sigma_1) \otimes w(t, \sigma_2)u(\sigma_1)u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$

(60)'de ikinci denkleme (62) ve (63) yerine koymak, bunun, çizgisel farka bağlı bir denklem içerde olduğu $x_2(t)$ o bulunur. (O, açık bir şekilde bu çizgisellik özelliğinin, metoda anahtar olduğu olmalıydı.) Böylece

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t \Phi(t, \sigma) \left[A_2(\sigma) \int_0^\sigma \int_0^\sigma w(\sigma, \sigma_1) \otimes w(\sigma, \sigma_2)u(\sigma_1)u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \right. \\ &\quad \left. + B_1(\sigma) \int_0^\sigma w(\sigma, \sigma_1)u(\sigma_1)d\sigma_1 u(\sigma) \right] d\sigma \end{aligned}$$

$w(t, \sigma) = 0$ gerçeği kullanmak o, eğer, $\sigma > t$ ise, (64), formda yazılabilir

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \int_0^t \int_0^t \int_0^t \Phi(t, \sigma) A_2(\sigma) w(\sigma, \sigma_1) \otimes w(\sigma, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (65) \\
&+ \int_0^t \int_0^t \Phi(t, \sigma) B_1(\sigma) w(\sigma, \sigma_1) u(\sigma_1) u(\sigma) d\sigma d\sigma_1 \quad (66)
\end{aligned}$$

Böylece $x(t)$ 'in 2 bileşeninin,

$$x_2(t) = \int_0^t \int_0^t w(t, \sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1$$

geçerek verildiği derece olduğu

$$\begin{aligned}
w(t, \sigma_1, \sigma_2) &= \int_0^t \Phi(t, \sigma) A_2(\sigma) w(\sigma, \sigma_1) \otimes w(\sigma, \sigma_2) d\sigma \\
&+ \Phi(t, \sigma_2) B_1(\sigma_2) w(\sigma_2, \sigma_1) \\
&= \int_{\max[\sigma_1, \sigma_2]}^t \Phi(t, \sigma) A_2(\sigma) \Phi(\sigma, \sigma_1) \otimes \Phi(\sigma, \sigma_2) d\sigma B_0(\sigma_1) \otimes B_0(\sigma_2) \\
&+ \Phi(t, \sigma_2) B_1(\sigma_2) \Phi(\sigma_2, \sigma_1) B_0(\sigma_1) \delta_{-1}(\sigma_2 - \sigma_1), \quad 0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq t
\end{aligned}$$

böylece derece yazılabilir, aynı prosedür, $x_3(t)$ 'ü tanımlayabilen 3 vektör çekirdeğinin olduğu bir dereceyi türemek için kullanılır. Açık bu, ama düzensiz hesap, okuyucuya soldur. Dereceyi giriş çıktı davranışı için 3 polynomial temsiline kararlaştırmak, açık bir şekilde vektör çekirdeklerinin o her biri, geçerek çoğaltılmalıydı $c(t)$.

Örnek 3.6 Variational denklem yaklaşımını kullanmak için örnekte ilk-emir evre-kilitlenen ilmiği 3.3 tekrar ziyaret etmek, bir daha çokta makinecilerin, modayı görevlendirdiğini gösterecek, mukayeseye ek olarak iki metot, şimdiye kadar tartıştı. İlk üç çekirdeği hesaplamak, başlayan nokta, resmi denklemdir, güç dizi formunda evre hatası olduğu için:

$$\dot{x}(t) = -Kx(t) + \frac{K}{6}x^3(t) + u(t) + \dots, \quad x(0) = 0$$

Farz edilen girişle resmi denkleme

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \alpha^3 x_3(t) + \dots$$

genişlemeyi yerine koymak $\alpha u(t)$, ilk üç variational denklemlerini verir:

$$\dot{x}_1(t) = -Kx_1(t) + u(t), \quad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = -Kx_2(t), \quad x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_3(t) = -Kx_3(t) + \frac{K}{6}x_1^3(t), \quad x_3(0) = 0$$

İlk variational denklemini çözmek, basit bir meseledir:

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-K(t-\sigma)} u(\sigma) d\sigma$$

Böylece, derece, sistem için 1 çekirdeğin, olduğu

$$h(t, \sigma) = e^{-K(t-\sigma)} \delta_{-1}(t-\sigma)$$

'dir. İkinci variational denklemi, hatta daha basittir, her $t \geq 0$ için $x_2(t) = 0$ vermek. Böylece derece, 2 çekirdeğin, aynen 0 olduğudur. Üçüncü variational denklemi, verir

$$x_3(t) = \int_0^t e^{-K(t-\sigma)} \frac{K}{6} x_1^3(\sigma) d\sigma$$

Standart derecede bunu yazmak 3 homojen, oluşturur, alacak, biraz daha çok, çalışacak. İlk adım, yazmaktır

$$\begin{aligned}
x_1^3(\sigma) &= \left[\int_0^\sigma e^{-K(\sigma-\sigma_1)} u(\sigma_1) d\sigma_1 \right]^3 \\
&= \int_0^\sigma e^{-K(\sigma-\sigma_1)} e^{-K(\sigma-\sigma_2)} e^{-K(\sigma-\sigma_3)} u(\sigma_1) u(\sigma_2) u(\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
&= \int_0^t e^{-K(\sigma-\sigma_1)} e^{-K(\sigma-\sigma_2)} e^{-K(\sigma-\sigma_3)} \delta_{-1}(\sigma-\sigma_1) \delta_{-1}(\sigma-\sigma_2) \delta_{-1}(\sigma-\sigma_3) \\
&\quad u(\sigma_1) u(\sigma_2) u(\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3
\end{aligned}$$

$x_3(t)$ için ifadeye bu ifadeyi yerine koymak, ve bütünleştirmenin emrini yeniden düzenlemek, verir

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= \int_0^t \frac{K}{6} e^{-Kt} \left[\int_0^t e^{-2K\sigma} \delta_{-1}(\sigma-\sigma_1) \delta_{-1}(\sigma-\sigma_2) \delta_{-1}(\sigma-\sigma_3) d\sigma \right] e^{K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} \\
&\quad u(\sigma_1) u(\sigma_2) u(\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
&= \int_0^t \frac{-1}{12} [e^{-3Kt} e^{K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} - e^{-Kt} e^{-2K\max(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)} e^{K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}] \\
&\quad u(\sigma_1) u(\sigma_2) u(\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3
\end{aligned}$$

Şimdi bir derece, sistem için 3 çekirdeğin, açık olduğudur. Fark et, yine de, bu sonucun, onla örnek 3.3'te kabul ettiği hemen açık olmadığı. Variational denklem yaklaşımının makinecileri, en genel resmi denklemlerin, düşünüldüğü zaman az değiştirir. Aslında, yanıtın, acıya sebep olmadan gevşetilebildiği çıktının ve sıfır-girişte çizgiselliğinde özel farzlar. Bazı ayrıntıda bunu resimlemek,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t), \quad t \geq 0$$

$u(t)$ olduğu genel resmi denklemi düşünür, ve $y(t)$, yönsüz niceliklerdir. $\hat{u}(t)$ tutturulmuş ilk durum ve girişle onu varsay, yanıt, $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$. Bu koymada, ilgiden girişin sapması bakımından kendisinden $\hat{y}(t), y_\delta(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ 'den çıktının sapmasını tanımlayan bir polynomial giriş çıktı temsili bulmak içindir $\hat{u}(t), u_\delta(t) = u(t) - \hat{u}(t)$.

Bu, benim, bütün değişkenler değişikliklerinin önceden, notasyonları temizler olduğunu bırakıyor olduğumu ifade eder. Derece boyunca N , farka bağlı denklemin doğru tarafı içerde (68), etrafta bir Taylor dizisi

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= f(\hat{x} + x_\delta, \hat{u} + u_\delta, t) \\ &= f(\hat{x}, \hat{u}, t) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N F_{ij}(t) x_\delta^{(i)} u_\delta^j + \dots, \quad F_{00} = 0 \end{aligned}$$

yoluyla (t 'inki en düşürmek) geçerek değiştirilebilir $\hat{x}, \hat{u}$. Şimdi, $\alpha u_\delta(t)$ formun sapma girişlerini düşünür, nere α Keyfi bir yönsüz nicelik midir, ve kendisi bakımından sonuç veren sapma yanıtının, genişletildiği α 'i farz eder mi :

$$x_\delta = \alpha x_{1\delta} + \alpha^2 x_{2\delta} + \dots$$

α^0 teriminin, $\alpha = 0$ girişin, $\hat{u}$ olduğunu ima ettiğinden beri kaçırıyor olduğunu not eder, hangisi, yanıtın, olduğu $\hat{x}$ 'i ima eder.) Farka bağlı denkleme yerine koymak, verir, (Yeniden) derece 3ü boyunca

$$\begin{aligned} \alpha \dot{x}_{1\delta} + \alpha^2 \dot{x}_{2\delta} + \alpha^3 \dot{x}_{3\delta} + \dots &= F_{10}(t)[\alpha x_{1\delta} + \alpha^2 x_{2\delta} + \alpha^3 x_{3\delta}] \\ &+ F_{20}(t)[\alpha x_{1\delta} + \alpha^2 x_{2\delta}]^{(2)} + F_{30}(t)[\alpha x_{1\delta}]^{(3)} + \alpha F_{01}(t) u_\delta \\ &+ \alpha^2 F_{02}(t) u_\delta^2 + \alpha^3 F_{03}(t) u_\delta^3 + F_{11}(t)[\alpha x_{1\delta} + \alpha^2 x_{2\delta}] \alpha u_\delta \\ &+ F_{12}(t)[\alpha x_{1\delta}] \alpha^2 u_\delta^2 + F_{21}(t)[\alpha x_{1\delta}]^{(2)} \alpha u_\delta + \dots \end{aligned}$$

Katsayıları eşit saymak, α 'in güçlerinin, ilk üç variational denklemlerinin, aşağıda listelediğini verdiğini beğenir.

$$\dot{x}_{1\delta} = F_{10}(t)x_{1\delta} + F_{01}(t)u_{\delta}, \quad x_{1\delta}(0) = 0$$

$$\dot{x}_{2\delta} = F_{10}(t)x_{2\delta} + F_{20}(t)x_{1\delta}^{(2)} + F_{02}(t)u_{\delta}^2 + F_{11}(t)x_{1\delta}u_{\delta}, \quad x_{2\delta}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3\delta} = & F_{10}(t)x_{3\delta} + F_{20}(t)[x_{1\delta} \otimes x_{2\delta} + x_{2\delta} \otimes x_{1\delta}] \\ & + F_{30}(t)x_{1\delta}^{(3)} + F_{03}(t)u_{\delta}^3 + F_{11}(t)x_{2\delta}u_{\delta} + F_{12}(t)x_{1\delta}u_{\delta}^2 \\ & + F_{21}(t)x_{1\delta}^{(2)}u_{\delta}, \quad x_{3\delta}(0) = 0 \end{aligned}$$

Ama önce olduğu gibi şimdi her değişme hasılatı için vektör çekirdeklerinin hesaplaması sadece, ara sıra olan bir uyarının, homojen bir terimin standart formunu elde etmek sokulmalı olduğu dışında. Sonra süreç, çıktı denklemini genişleterek tamamlanır, o genişlemeye yerine koymak, ve çıktının, (68)'in, girişe güvenmek için izin verildiğini içeride haritaya döktüğünden beri daha çok uyarının muhtemelen bazı sokmasıyla derece gibi tekrar toplayan koşulları.

Örnek 3.7 Variational denklem yaklaşımı, örnek 3.5'in çizgisel olmayan geri besleme sistemine uygulanacak:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\psi[u(t)-y(t)], \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = cx(t), \quad t \geq 0$$

ve nere $\hat{u}(t) = 0, \hat{x}(t) = 0$ ve $\hat{y}(t) = 0$ her $t \geq 0$ için

$$\psi(\alpha) = \alpha + \psi_2\alpha^2 + \psi_3\alpha^3 + \dots$$

olduğu. Derece 2i boyunca çekirdekleri hesaplamak, sistem, öyle yazılır

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b[u(t)-y(t)] + \psi_2b[u(t)-y(t)]^2 + \dots$$

Onun, hiçbir özel avantajı teklif etmediğinden beri bu örnek için genel notasyonu düşürmek için uygundur. $\alpha u_{\delta}(t)$ girişi farz etmek, ve

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots$$

yerine koyarken yanıt, ve α güçlerinin, variational denklemlerini verdiği gibi

$$\dot{x}_1(t) = [A - bc]x_1(t) + bu(t), \quad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = [A - bc]x_2(t) + \psi_2 b [u(t) - cx_1(t)]^2, \quad x_2(0) = 0$$

katsayılarını eşit saymak.

İlk denklem,

$$x_1(t) = \int_0^t e^{[A-bc](t-\sigma_1)} bu(\sigma_1) d\sigma_1$$

'den, ve çıktı denkleminin, çizgisel olduğundan beri, derece, polynomial giriş çıktı haritasında 1 çekirdeğin, olduğu

$$h(t-\sigma_1) = ce^{[A-bc](t-\sigma_1)} b\delta_{-1}(t-\sigma_1)$$

'dir. İkinci denklem, benzer bir modada çözülür, koşulların, karıştırmasına rağmen, daha karışıktır.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t e^{[A-bc](t-\sigma_1)} \psi_2 b \left[u(\sigma_1) - \int_0^{\sigma_1} h(\sigma_1-\sigma_2) u(\sigma_2) d\sigma_2 \right]^2 d\sigma_1 \\ &= \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \psi_2 e^{[A-bc](t-\sigma_1)} b \delta_0(\sigma_1-\sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} -2\psi_2 e^{[A-bc](t-\sigma_1)} b h(\sigma_1-\sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_1} \psi_2 e^{[A-bc](t-\sigma_1)} b h(\sigma_1-\sigma_2) h(\sigma_1-\sigma_3) u(\sigma_2) u(\sigma_3) d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_1 \end{aligned}$$

2 böylece derece, adlandırır, giriş çıktı haritasından,

$$\int_0^t \int_0^t h(t, \sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1$$

'dir, nere, son terimde değişkenlerin biraz tekrar etiketlemesiyle,

$$h(t, \sigma_1, \sigma_2) = \psi_2 h(t - \sigma_1) \delta_0(\sigma_1 - \sigma_2) \delta_{-1}(\sigma_1 - \sigma_2) - 2\psi_2 h(t - \sigma_1) h(\sigma_1 - \sigma_2) \\ + \int_0^t \psi_2 h(t - \sigma_3) h(\sigma_3 - \sigma_2) h(\sigma_3 - \sigma_1) d\sigma_3$$

2 çekirdeğin, açık yolda verilmiş sistem parametreleri bakımından yazılabildiği bu derece.

3.5. Büyüyen Üstel Yaklaşım

Bölüm 2i'nde tartışılan exponentialsı büyümenin malları, isteyerek sabit-parametreden transfer görev tanımlamalarını (Durağan) resmi denklemlere bulmanın problemine adapte edilebilir.

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = cx(t) + y_0(t), \quad t \geq 0$$

$a(0,0) = 0$ ve $a(x, u)$ içeride x analitik ve u genel formu düşün. Kısaca belirtti, simetrik ilk N , (69)'e uyuyor olan görevleri transfer eder, takip eden gibi hesaplanır. İlk, $a(x, u)$ x ve u 'da bir güç dizisi ile değiştirir. Sonra,

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} + \dots + e^{\lambda_N t}$$

formun bir girişini farz eder, ve

$$x(t) = \sum_m G_{m_1, \dots, m_N}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_N \lambda_N) t}$$

notasyonun, kesinlikle bölüm 2i'nin olan olduğu formun bir çözümünü farz eder, ve vektör katsayıları, kararsızdır. Farka bağlı denkleme yerine koymak, katsayıların, üstelleri beğendiğini eşit sayarak

$$G_{1,0,\dots,0}(\lambda_1), G_{1,1,0,\dots,0}(\lambda_1, \lambda_2), \dots, G_{1,\dots,1}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

için çözer. Sonra çıktının, çizgisel bir görev olduğundan beri

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= cG_{1,0,\dots,0}(s) \\
H_{2sym}(s_1, s_2) &= \frac{1}{2!} cG_{1,1,0,\dots,0}(s_1, s_2) \\
&\vdots \\
H_{Nsym}(s_1, \dots, s_N) &= \frac{1}{N!} cG_{1,\dots,1}(s_1, \dots, s_N)
\end{aligned}$$

Ben, emekte oldukça büyük tasarrufun, fark edildiğini not etmeliydim, eğer açıkça ilginin koşullarına katkıda bulunmayacak olan exponentials, hesabın her sahnesinde düşürülürse. Örneğin, en az biri için $m_j > 1$ 'le hiçbir terim j ihtiyaç içeride (71), taşınmaz.

Örnek 3.8 İlk üçü simetrik bulmak, şimdi aşına resmi denklem tanımlamasına uyuyor olan görevleri transfer eder

$$\dot{x}(t) = -Kx(t) + \frac{K}{6}x^3(t) + u(t) + \dots$$

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_3 t}$$

formun bir girişini farz eder, ve, basitlik için düşünceleri düşürmek, formun bir çözümü

$$\begin{aligned}
x(t) &= G_{100} e^{\lambda_1 t} + G_{010} e^{\lambda_2 t} + G_{001} e^{\lambda_3 t} + G_{200} e^{2\lambda_1 t} \\
&+ G_{020} e^{2\lambda_2 t} + G_{002} e^{2\lambda_3 t} + G_{110} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \\
&+ G_{101} e^{(\lambda_1 + \lambda_3)t} + G_{011} e^{(\lambda_2 + \lambda_3)t} + G_{111} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + \dots
\end{aligned}$$

Tabii, çıktıyla bu yönsüz olayda duruma aynı, G notasyonu, simetrik transfer görev notasyonu ile değiştirilebilirdi. Hem de $G_{200}, G_{020}, G_{002}$ koşullarının, onların, gereksiz olduğu bir örneğin bağlamında sadece göstermek için kapsandığını not eder. Herhangi bir oranda, kolay bir hesap, verir

$$x^3(t) = 6G_{100}G_{010}G_{001}e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + \dots$$

Farka bağlı denkleme yerine koymak, ve sırasıyla

$$e^{\lambda_1 t}, e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}, e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$$

'in katsayılarını eşit saymak, denklemlerin olduğu

$$\lambda_1 G_{100} + KG_{100} = 1$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) G_{110} + KG_{110} = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) G_{111} + KG_{111} = KG_{100} G_{010} G_{001}$$

hasılatlar. Dönüşte bunları çözmek, verir

$$G_{100}(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1 + K}$$

$$G_{110}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

$$G_{111}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{KG_{100}G_{010}G_{001}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + K}$$

Açık gerçekleri kullanmak: Simetrik

$$G_{010}(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2 + K}, \quad G_{001}(\lambda_3) = \frac{1}{\lambda_3 + K}$$

ilk üç, görevlerin, olduğu

$$H_1(s) = \frac{1}{s + K}$$

$$H_{2sym}(s_1, s_2) = 0$$

$$(P) \quad H_{3sym}(s_1, s_2, s_3) = \frac{K/6}{(s_1 + s_2 + s_3 + K)(s_1 + K)(s_2 + K)(s_3 + K)}$$

'i transfer eder.

Örnek 3.9 Yeniden formun en basit genel çizgisel olmayan denklemini düşünür (69);
Bilinear durum denklemi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t)u(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t), \quad x(0) = 0$$

İlk ikiyi simetrik bulmak, görevleri transfer eder,

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

izin verir, ve onu farz eder

$$x(t) = G_{1,0}e^{\lambda_1 t} + G_{0,1}e^{\lambda_2 t} + G_{1,1}e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} + \dots$$

Farka bağı denkleme yerine koymak, ve katsayıları eşit saymak, eğer $e^{\lambda_1 t}$ verirse

$$\lambda_1 G_{1,0} = A G_{1,0} + b$$

Bu çizgisel denklemi çözmek,

$$G_{1,0} = (\lambda_1 I - A)^{-1} b$$

öyle verir ki 1 derece, görevin, olduğu

$$H(s) = c (sI - A)^{-1} b$$

'i transfer eder. $e^{(\lambda_1, \lambda_2)t}$ 'in katsayıları, benzer bir modada denklemi vermek için eşit sayılır

$$(\lambda_1 + \lambda_2) G_{1,1} = A G_{1,1} + D G_{1,0} + D G_{0,1}$$

$G_{1,0} = (\lambda_1 I - A)^{-1} b$ ve $G_{0,1} = (\lambda_2 I - A)^{-1} b$ yerine koymak, ve çözmek, verir

$$G_{1,1} = [(\lambda_1 + \lambda_2) I - A]^{-1} D [(\lambda_1 I - A)^{-1} b + (\lambda_2 I - A)^{-1} b]$$

2 simetrik böylece derece, görevin, olduğu

$$(S) \quad H_{2sym}(s_1, s_2) = \frac{1}{2} c [(s_1 + s_2) I - A]^{-1} D [(s_1 I - A)^{-1} b + (s_2 I - A)^{-1} b]$$

'i transfer eder. Daha basit asimetrik bir uyarılmanın, denetleme ile yazılabildiğini not et, yani

$$(V) \quad H_2(s_1, s_2) = c [(s_1 + s_2) I - A]^{-1} D (s_1 I - A)^{-1} b$$

Ben, okuyucuya 3 asimetrik bir derecenin, görevin, yazılabildiği

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = c [(s_1 + s_2 + s_3) I - A]^{-1} D [(s_1 + s_2) I - A]^{-1} D (s_1 I - A)^{-1} b$$

'i transfer ettiğini göstermesi için onu bırakırım. Bundan, daha yüksek-derece transfer görevleri için bir desen, açık bir şekilde olmalıydı.

(73)

(74)

Bundan, daha yüksek-derece transfer görevleri için bir desen, açık bir şekilde olmalıydı.

3.6. Sistem, N'inci-Emir Farklı Olan Denklemleri İle Tanımladı.

Tartışılan metotların çeşitli uyarlamaları, zaman zaman edebiyatta gözüktü. Bunlar çoğunlukla, N'inci-emir için kuruldu, daha yaşlı edebiyatta çizgisel olmayan, farka bağlı denklemler. Bazı problemlerin, tamamen doğal olarak bu koşullarda tanımlandığından beri, ben,

(75)

$$y^{(N)}(t) + a_{N-1}(t)y^{(N-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) + \sum_{k=2}^K b_k(t)y^k(t) = u(t)$$

$$y(0) = y^{(1)}(0) = \dots = y^{(N-1)}(0) = 0$$

olduğu denklem için variational genişleme metodunu inceleyeceğim, bundan dolayı o, $u(t) = 0$ için çözümün, olduğu $y(t) = 0$ dır. Tabii, bu, özel bir olaydır, ⁽⁷⁶⁾ama fikirler, saydam bir modada geneller. $\alpha u(t)$ girişe yanıtı düşün, nere α Bir yönsüz nicelik midir, ve

$$y(t) = \sum_{m=1}^M \alpha^m y_m(t) + \dots$$

nerede sadece M'in veya daha azın, açıkça tutulan olduğu derecenin koşullarının olduğunu ⁽⁷⁷⁾yazar. Farka bağlı denkleme yerine koymak,

$$\sum_{m=1}^M \alpha^m \sum_{n=0}^N a_n(t)y_m^{(n)}(t) + \sum_{k=2}^K b_k(t) \left[\sum_{m=1}^M \alpha^m y_m(t) \right]^k + \dots = \alpha u(t)$$

$\alpha_N(t) = 1$ nerede olduğunu verir, ve ilk koşullar,

$$y_m^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Katsayıları eşit saymak α Her iki kenarda,

$$\sum_{n=0}^N a_n(t)y_1^{(n)}(t) = u(t), \quad y_1^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, \dots, N-1$$

ver, ve bu çizgisel farka bağlı denklemin çözümü, formda yazılabilir

$$y_1(t) = \int_0^t h_1(t, \sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1$$

α^2 'in katsayılarını eşit saymak, verir

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) y_2^{(n)}(t) + b_2(t) y_1^2(t) = 0, \quad y_1^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Bu farka bağlı denklemin çözümü, formda yazılabilir

$$y_2(t) = \int_0^t h_1(t, \sigma_1) b_2(\sigma_1) y_1^2(\sigma_1) d\sigma_1$$

Olağan derecede bunu yazmak 2 homojen, oluşturur, $y_1^2(\sigma_1)$ için bir yer değiştirme: gerektirir

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_0^t h_1(t, \sigma_1) b_2(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} h_1(\sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_2) d\sigma_2 \int_0^{\sigma_1} h_1(\sigma_1, \sigma_3) u(\sigma_3) d\sigma_3 d\sigma_1 \\ &= \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_1} h_1(t, \sigma_1) b_2(\sigma_2) h_1(\sigma_1, \sigma_2) h_1(\sigma_1, \sigma_3) u(\sigma_2) u(\sigma_3) d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_1 \end{aligned}$$

Ünite adımını sokmak, iş görür, bundan dolayı bütünleştirmenin sınırları, t 'e kaldırılabilir, ve değişkenleri tekrar etiketlemek,

$$y_2(t) = \int_0^t \int_0^t h_2(t, \sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

nerede olduğu

$$h_2(t, \sigma_1, \sigma_2) = \int_0^t h_1(t, \sigma) b_2(\sigma) h_1(\sigma, \sigma_1) h_1(\sigma, \sigma_2) \delta_{-1}(\sigma - \sigma_1) \delta_{-1}(\sigma - \sigma_2) d\sigma$$

'i verir.

Ben, benzer bir yolda (Budanan) polynomial giriş çıktı temsilinde (84) daha yüksek-derece çekirdeklerini hesaplamak için devam edebilirim. Genel bir formüle etmeye tek engel, çizgisel olmayan terimde içeride yalan söyler (76). Bu,

$$\left[\sum_{m=1}^M \alpha^m y_m(t) \right]^k = \sum_{j=k}^{M_k} \alpha^j y_{j,k}(t) \quad (85)$$

yazarak tutulabilir, ve koşullar boyunca bir lanet etmeyi türemek $y_{j,k}(t), j \geq k$. İzin ver

$$f(\alpha) = \sum_{m=1}^M \alpha^m y_m(t) \quad (86)$$

$$g(\alpha) = \left[\sum_{m=1}^M \alpha^m y_m(t) \right]^{k-1}$$

Sonra, $g(\alpha)$, öyle

$$g(\alpha) = \sum_{j=k-1}^{M_{k-1}} \alpha^j y_{j,k-1}(t)$$

ve yazılabilir

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{j=k}^{M_k} \alpha^j y_{j,k}(t)$$

$\alpha^j, j \geq k$ 'i izole etmek, bu denklemin her iki kenarında adlandırır, göre her iki kenar j zamanını ayırır α ve koy $\alpha = 0$.

$$\frac{d^j}{d\alpha^j} [f(\alpha)g(\alpha)] = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \left[\frac{d^i}{d\alpha^i} f(\alpha) \right] \left[\frac{d^{j-i}}{d\alpha^{j-1}} g(\alpha) \right]$$

ürün kuralını kullanmak, verir

$$\sum_{i=0}^j y_i(t) y_{j-i,k-1}(t) = y_{j,k}(t)$$

(89)

(94)

Ama toplamda daha aşağı sınır, o zamandan beri 1'e kaldırılabilir $y_0(t) = 0$. $j \geq k$ olduğu için, ve sıfır olmayan summand-lar $j - i \geq k - 1$ 'e uyduğu için toplamda üst sınır, geçerek değiştirilebilir $j - k + 1$. Böylece, kendisi için olduğu

$$y_{j,k}(t) = \sum_{i=1}^{j-k+1} y_i(t)y_{j-i,k-1}(t) \quad (90)$$

$$k = 1, y_{j,1}(t) = y_j(t).$$

Yakında probleme şimdi dönmek, denklemin her iki kenarında α^3 'in katsayılarını eşit sayar (91)

$$\sum_{m=1}^M \alpha^m \sum_{n=0}^N a_n(t)y_m^{(n)}(t) + \sum_{k=2}^K b_k(t) \sum_{j=k}^{M_k} \alpha^j y_{j,k}(t) + \dots = \alpha u(t), \quad y_m^{(n)}(0) = 0$$

Bu,

(92)

$$\sum_{n=0}^N a_n(t)y_3^{(n)}(t) + b_2(t)y_{3,2}(t) + b_3(t)y_{3,3}(t) = 0$$

bütünüyle ilk koşulların, nerede sıfır olduğunu verir. Çözüm, formda yazılabilir

(93)

$$y_3(t) = \int_0^t h_1(t, \sigma_1) [b_2(\sigma_1)y_{3,2}(\sigma_1) + b_3(\sigma_1)y_{3,3}(\sigma_1)] d\sigma_1$$

Lanet etmeler sadece,

$$y_{3,2}(\sigma_1) = y_1(\sigma_1)y_{2,1}(\sigma_1) + y_2(\sigma_1)y_{1,1}(\sigma_1) = 2y_1(\sigma_1)y_2(\sigma_1)$$

$$y_{3,3}(\sigma_1) = y_1(\sigma_1)y_{2,2}(\sigma_1) = y_1^3(\sigma_1)$$

hasılatı geliştirdi, bundan dolayı o

$$y_3(t) = \int_0^t h_1(t, \sigma_1) [2b_2(\sigma_1)y_1(\sigma_1)y_2(\sigma_1) + b_3(\sigma_1)y_1^3(\sigma_1)] d\sigma_1$$

Şimdi bir derecenin formuna bunu koyması için (78), (80)'den $y_1(\sigma_1), y_2(\sigma_2)$ için yer değiştirme adil meselesi, ve bütünlerin bazı idaresi 3 homojen subsystemdir.

Ben hem de, büyüyen üstel metodun, tamamen kolayca, takip eden örneğin, gösterdiği gibi n'inci-emir farklı olan denklemlerine adapte edilebildiği ona dikkat çekmeliydim.

Örnek 3.10 Basit pandülün, dayandığı bir kütleden m , uzunluğun kütlesiz bir çubuğunda L 'i astı, ekseninde giriş torkunun, $u(t)$ olduğudur, ekseninde gevşeten katsayıdır, bir, ve çıktı $y(t)$, dikey açıdır. Kuyu, bu sistemi tanımlıyor olan farka bağlı denklemi bildi,

$$\ddot{y}(t) + \frac{a}{mL^2}\dot{y}(t) + \frac{g}{L}\sin[y(t)] = \frac{1}{mL^2}u(t)$$

'dir, ve ilk koşulların, sıfır olduğu farz edilir. İlk üçü simetrik hesaplamak, büyüyen üstel metot ile görevleri transfer eder, ilk adım, onun güç dizi genişlemesi ile $\sin[y(t)]$ değiştirmektir. Tabii, sadece adlandır, emir boyunca üç ihtiyaç, açıkça tutulur, bundan dolayı ilginin farka bağlı denklemi,

$$\ddot{y}(t) + \frac{a}{mL^2}\dot{y}(t) + \frac{g}{L}y(t) - \frac{g}{3!L}y^3(t) + \dots = \frac{1}{mL^2}u(t)$$

Büyüyen üstel metot, tartışarak bu olayda basitleştirilebilir, $y(t)$ düzenli derecenin hiçbir homojen koşulunu içermeyecek olan durumun veya farka bağlı denklemden fiziğinden her biri.

Odur, eğer giriş sinyali $u(t)$, $y(t)$ çıktı sinyalini üretirse, sonra giriş sinyali $-u(t)$, $-y(t)$ üretir, ve o, sadece garip-derece koşullarının, mevcut olabildiğini izler. Simetrik transferi hesaplamak, derece üçü boyunca iş görür, formun bir giriş sinyalini farz eder

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_3 t}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

2 koşulun, sıfır olmak için bilindiği bütün derecenin,

$$y(t) = H_1(\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + H_1(\lambda_2)e^{\lambda_2 t} + H_1(\lambda_3)e^{\lambda_3 t} \\ + 3!H_{3ym}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + \dots$$

yanıtı farz ettiğinden beri nere, alışıldığı gibi, sadece son sonuca katkıda bulunuyor olan koşullar, tutuldu. (Simetrik transfer görev notasyonunun, G -notasyondan ziyade, hesapların, dosdoğru çıktıyı karıştırdığından beri kullanıldığını fark et.) Farka bağlı denkleme yerine koymak, verir, birçok koşulla yeniden, düşürdü,

$$\begin{aligned}
& \lambda_1^2 H_1(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 3! H_{3sym}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + \frac{a}{mL^2} \lambda_1 H_1(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} \\
& + \frac{a}{mL^2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) 3! H_{3sym}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + \frac{g}{L} H_1(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} \\
& + \frac{g}{L} 3! H_{3sym}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \\
& - \frac{g}{L} H_1(\lambda_1) H_1(\lambda_2) H_1(\lambda_3) e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + \dots \\
& = \frac{1}{mL^2} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{mL^2} e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{mL^2} e^{\lambda_3 t}
\end{aligned}$$

$e^{\lambda_1 t}$ 'in katsayılarını eşit saymak, verir

$$H_1(\lambda_1) = \frac{1/(mL^2)}{\lambda_1^2 + a/(mL^2)\lambda_1 + g/L}$$

Böylece, 1 derece, görevin, olduğu

$$H_1(s) = \frac{1/(mL^2)}{s^2 + a/(mL^2)s + g/L}$$

'i transfer eder.

$$3! H_{3sym}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{g/L}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + a/(mL^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + g/L} H_1(\lambda_1) H_1(\lambda_2) H_1(\lambda_3)$$

$e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ hasılatlarının katsayılarını eşit saymak, veya, daha sıkı formda,

$$H_{3sym}(s_1, s_2, s_3) = \frac{mgL}{3!} H_1(s_1 + s_2 + s_3) H_1(s_1) H_1(s_2) H_1(s_3)$$

BÖLÜM 4

GERÇEKLEŞTİRME TEORİSİ

Giriş/çıkış için verilen verilerin problemin gerçekleştirimi 3.bölümdeki problemin tersi olarak düşünülebilir.bu gerçekleştirme teorisi hesaplama ve homojen polinomal ya da Volterra sistemiyle belirtilen durum-eşitlik gösteriminin özellikleriyle uğraşır.

Tabi ki belirtilen sistemin kabuklar ve transfer sistemine göre tanımlandığı kabul edilir.Özellikle,buradaki tartışmaların birçoğu,düzenli çekirdek ve transfer fonksiyonları gösterimiyle tanımlanan sabit sistemler için olacaktır.

Doğrusal gerçekleştirme teorisini tekrar gözden geçirdikten sonra ,gerçekleştirilebilirlik durumları ve çiftdoğrusal durum eşitliği hesaplama prosedürleri sabit homojen sistemler için tartışılacak..Sonra sabit polinomal ve Volterra sistemleri anlatılacak.Çift doğrusal durum eşitliklerinin yağısal özelliklerini tartıştıktan sonra ,çift doğrusal durum eşitliklerine göre sabit olamayan sistemler için gerçekleştirebilirlik durumları tartışılacak.Bu gelişme boyunca ,sadece sonlu-boyutsal gerçekleştirmelerle ilgilenilecek-Sonsuz boyutsal gerçekleştirmelerden bahsedilmeyecek.Ayrıca minimal boyutlu çift doğrusal gerçekleştirmelerin özellikleri ve yapısına vurgu yapılacaktır.

4.1 Doğrusal Gerçekleştirme Teorisi

Doğrusal sistem teorisindeki temel problem gerçekleştirimi şöyle ifade edilebilir.Doğrusal transfer fonksiyonu $H(s)$ olarak verilip,sonlu-boyutsal doğrusal durum eşitliğini bul,bu bulunan bu içerikte doğrusal gerçekleştirme olarak adlandırılır.

Doğrusal durum eşitliği şu formu alacaktır:

$$\dot{X}(t) = A(x) + bu(t), \quad t > 0$$

$$Y(t) = cx(t), \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

$X(t)$ $m \times 1$ durum vektörü iken,her t bir sabit uzay R^m elamanı,ve $u(t)$ ve $y(t)$ skalerdir.Doğrudan iletim terimi, $du(t)$,temel gelişmeyi değiştirmeden çıkış eşitliğine eklenebilir,ancak bunu burada yapmayacağız.Doğrusal durum eşitliği (1) kısaca (A,b,c,R^m) olarak gösterilir.

Gerçekleştirme problemini iki kısımda düşünmek doğaldır. Birincisi, doğrusal gerçekleştirme için $H(s)$ deki ihtiyaçları ve durumları bulmaktır. Bu doğrusal gerçekleştirmenin var olduğu sistemlerdeki durumları bulmaktır. İkincisi, doğrusal gerçekleştirilebilir A, b, c yi hesaplama metodunu bulmaktır. Genellikle minimal doğrusal gerçekleştirme bulunur, bu m boyutunun olabilecek en küçük değerindeki gerçekleştirmedir.

Doğrusal gerçekleştirilebilirlik sorusu okuyucuyu şüpheye düşürmeyecek kadar basittir. $H(s)$ transfer fonksiyonunun tam-gerçek mantıklılığı sistemin doğrusal gerçekleştirilebilirliği için gerekli durumdur. Çünkü transfer fonksiyonu (1) için tam gerçek rasyonel fonksiyon $c(sI - A)^{-1}b$ dir. Bu durum da yeterlidir. bilindik durum eşitliği (1) ile kullanarak gösterilebilir. Tabi $H(s)$ nin katsayılarından denetimle yazarak. Bu bildik gelişme minimal doğrusal gerçekleştirmenin

peşinden izlenebilirken, farkı bir yaklaşım sunacağım.

Bu doğrusal olmayan durumlarda daha basit bir erişim sağlar. Aslında doğrusal ve doğrusal olmayan gerçekleştirme teorilerinin benzerlikleri fikrinde dolayı doğrusal durum gözlemleri olağandan daha çok detaylandırılacak.

Bilindik seri genişlemesini kullanarak

$$(sI - A)^{-1} = Is^{-1} + As^{-2} + A^2s^{-3} + \dots \quad (2)$$

Doğrusal durum eşitliğinin transfer fonksiyonunu (1) negatif power serisiyle yazılabilir.

$$c(sI - A)^{-1}b = cb s^{-1} + cAb s^{-2} + cA^2b s^{-3} + \dots \quad (3)$$

(gösterimin basitleştirilmesi için, özdeşlik matrislerinin boyutlarını , uyabilirlik gereksinimiyle sabitlemek için ihmal ettim.) Bu doğrusal gerçekleştirilebilirlik için daha açık olur. Negatif power serileri formunda gösterilen $H(s)$ transfer fonksiyonlarını düşünmeye yeter.

$$H(s) = h_0 s^{-1} + h_1 s^{-2} + h_2 s^{-3} + \dots \quad (4)$$

Başka bir deyişle, sadece sonsuzda analitik sonsuzda sıfır olan transfer fonksiyonları düşünülmeye gerektir. (3) ve (4) ün karşılaştırılması şunu gösterir: seri bakış açılarından , doğrusal gerçekleştirme teorilerindeki temel matematiksel problemler S, b, c matrislerini bulmayı kapsar. yani $m \times m, m \times 1, 1 \times m$ boyutları şunu verir.

$$cA^j b = h_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Bu temel problemi çözecek ilk adım , belirli basit soyut gerçekleştirme olacaktır. Bu özel seçilmiş doğrusal uzay ya da durum uzayı kapsayan doğrusal operatörler olarak belirtilen A, b, c deki gerçekleştirmedir. Sonra matrix gösterimi , durum uzayı R^m olarak değiştirilen doğrusal operatörler için hesaplanabilir.

Bu iki hesaplamadan açıktır ki her hangi $i \geq 0$ için $S^i H(s)$ çok uygun bir rasyonel fonksiyon aynı $H(s)$ paydalı. Kaydırma işlemiyle sadece sayısal polinom değişir. Böylece tüm elementler rasyonel bir fonksiyon olarak gösterilebilir aynı uygun paydalı. Sadece elementten elemente sayısal kısım farklılık gösterir. $m-1$ dereceli polinomlar doğrusaş bir uzay oluşturduğundan , $U \leq m$ boyutları ve böylece $H(s)$ doğrusal gerçekleştirilirdir.

Örnek. 4.1 katıca uygun rasyonel aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{4s^2 + 7s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Basit hesaplamalar verir ki,

$$SH(s) = \frac{4s^3 + 7s^2 + 3s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} - 4 = \frac{-9s^2 - 17s - 8}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

ve

$$S^2 H(s) = \frac{-9s^3 - 17s^2 - 8s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} + 9 = \frac{19s^2 + 37s + 18}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Şu açıktır ki : $H(s)$ ve $SH(s)$ doğrusal olarak U dan bağımsızdırlar, ama bir fazla hesaplama gösterir ki,

$$S^2 H(s) = -3SH(s) - 2H(s)$$

Bu nedenle, R^2 terine U konabilir, standart sıralı temel elementleri şu şekilde seçersek

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = H(s), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = SH(s)$$

Temelde ki başlatma işlemi için bir matris gösterimi

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ayrıca, kaydırma işlemi için matrisin şunu tatmin etmesi lazım,

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Şöyle devam eder,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Son olarak $EH(s) = 4$ ve $ESH(s) = -9$ olduğundan, değerlendirme işlemcisi için bir matris gösterimi,

$$c = [4 \ -9]$$

2 boyutlu bir gerçekleştirme 3-derece bir aktarım fonksiyonu için elde edilebilir, payı ve paydayı $H(s)$ ile çarparak,

$$H(s) = \frac{(4s+3)(s+1)}{(s+2)(s+1)^2}$$

Doğrusal kaydırma gerçekleştirmesini kurmada dâhil edilen bağımsızlık hesaplamaları otomatik olarak payda ve payda ki yaygın faktörü iptal eder.

Gerçekleştirme teorisi iyi bilinen bir sıra koşullu testi vermeye yeniden ifadelendirilebilir. U yu negatif üslü serilerin doğrusal uzayı olarak gösterirsek, element

$$S^j H(s) = h_j s^{-1} + h_{j+1} s^{-2} + h_{j+2} s^{-3} + \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

İlişkili dizinin katsayılarıyla değiştirilebilir

$$(h_j, h_{j+1}, h_{j+2}, \dots), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

U nun sonlu boyuta sahip olduğu açıktır ancak ve ancak bu dizinin bir sonlu sayısı doğrusal bağımsızsa.

Teori 4.3

$H(s)$ aktarım fonksiyonuyla belirlenen bir doğrusal sistem doğrusal gerçekleştirilebilir ancak ve ancak davranış matrisi

$$B_H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

sonlu sıraya sahipse. Dahası, bir doğrusal gerçekleştirme sistemi için B_H sırası $H(s)$ nin minimum doğrusal gerçeklemesidir.

Burada davranış matrisinden minimal gerçeklemenin yapısını özetleyebilirim. Ancak bu kısa bir göz gezdirme olarak tasarlandı, böylece tamamı referanslara bırakıldı. Ayrıca verilen $H(s)$ nin minimal denklik özelliklerini bakmayı da geçeceğim. Bu konular kısım 4.4 de çift doğrusal gerçeklemelerde anlatılacak ve şimdi $D = 0$ olarak bir çok doğrusal teori atlanacak.

Ancak, sabit doğrusal gerçekleştirme konusunu bırakmadan önce, verilen aktarım fonksiyonu yerine başlangıç noktası verilen çekirdek olursa, oluşan değişiklikleri açıklayacağım. Uygun rasyonel aktarım fonksiyonu üssel çekirdek şekli ile ilişkilendiğinden,

$$h(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\sigma_i} a_{ij} t^{j-1} e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (16)$$

Açıktır ki, $h(t)$ bir doğrusal durum eşitliği ile gerçekleştirilebilir ancak ve ancak 16 daki şekle sahipse. $t \geq 0$ için verilen çekirdek analitik kabul edilebilir, diğer türlü bir doğrusal durum eşitliği tarafından gerçekleştirilemeyecektir. $h(t)$ yi $t=0$ kuvvet dizileriyle genişletirsek, Laplace dönüşüm şekli $h(t)$ şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} L[h(t)] &= \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \\ &= h(0) \int_0^{\infty} e^{-st} dt + h^{(1)}(0) \int_0^{\infty} \frac{t}{1!} e^{-st} dt + h^{(2)}(0) \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2!} e^{-st} dt + \dots \\ &= h(0)s^{-1} + h^{(1)}(0)s^{-2} + h^{(2)}(0)s^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Şöyle ki,

$$h^{(j)}(0) = \left. \frac{d^j}{dt^j} h(t) \right|_{t=0}$$

Böylece, 4 deki girişler 0 da değerlendirilen çekirdek türevleri tarafından belirtilebilir. Bu noktadan, kaydırma gerçekleştirilmesinin yapısı biraz önce bahsedildiği gibidir.

Çok girişli-çıkışlı doğrusal sistemler için, gerçekleştirme teorisi daha hafiftir. Tek girişli sahip olmasına rağmen, tek giriş sistemler temel doğrusal gerçekleştirme sonuçları çok değişkenli sistemler için teknik yoğunlaşma olarak kısım 4.2 de bilinecek. Bu nedenle, kısa bir yorum uygundur.

Doğrusal durum eşitliğini düşün,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$x(t)$, $m \times 1$, giriş $u(t)$ bir $r \times 1$ vektör ve $y(t)$ bir $q \times 1$ vektörü olmak üzere.

İltiltili aktarım fonksiyonu $q \times r$ matrisi

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (19)$$

Teori 4.4 bir doğrusal sistemin $a \times r$ aktarım fonksiyonu matrisi $H(s)$ için tanımlandığını varsayalım. $H(s)$ bir katı uygun rasyonel matrisse, sistem bir sonlu boyut doğrusal durum eşitliği tarafından gerçekleştirilir. Yani, ancak ve ancak $H(s)$ nin her elementi $H_{ij}(s)$ katı uygun rasyonel fonksiyonsa.

Teori 4.4 ün gerekli kısmı $(sI - A)^{-1}$ yazarak açıklanabilir. Yeterlilik eşit olarak kolaydır: her güçlü uygun, rasyonel $H_{ij}(s)$ 1 in bir durum eşitliği tarafından gerçekleştirilebilir.

Ve tüm bu durum eşitlikleri r giriş q çıkış değerini vermek için birleştirilebilir.

Gerçekleme sorusu sabit olmayan sistemler içinde ilginçtir. 1. Bölümden sabitliğin tanımını hatırla, sonuçlar giriş/çıkış gösterimi şeklinde durumlanacak

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (20)$$

Sabit olmayan durumda, doğrusal durum eşitlik gerçekleştirilmesi zaman değişkenli katsayılarla birlikte,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)u(t) \\ y(t) &= c(t)x(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Teknik nedenlerden dolayı $A(t)$, $b(t)$ ve $c(t)$ nin sürekli matris fonksiyonu olması gerekir. Yani, her giriş bu katsayı matrislerindeki bir sürekli fonksiyondur.

Teori 4.5 çekirdek $h(t, \sigma)$ sonlu boyusal, zaman değişkenli doğrusal durum eşitliği tarafından gerçekleştirilebilir ancak ve ancak ayrılabilirse.

Kanıt, çekirdek doğrusal gerçekleştirilebilir ve 21 $h(t, \sigma)$ nin gerçekleştirilmesi ise,

$$h(t, \sigma) = c(t)\Phi(t, \sigma)b(\sigma)$$

Yazarak,

$$c(t)\Phi(t, 0) = [v_{01}(t) \cdots v_{0n}(t)], \quad \Phi(0, \sigma)b(\sigma) = \begin{bmatrix} v_{11}(\sigma) \\ \vdots \\ v_{1n}(\sigma) \end{bmatrix} \quad \text{gösterir ki } h(t, \sigma) \text{ ayrılabilir}$$

form da.

$$h(t, \sigma) = \sum_{i=1}^n v_{0i}(t)v_{1i}(\sigma)$$

Ayrılabilmeden kaynaklanan süreklilik, doğrusal durum denkli üzerinde ki süreklilik varsayımlarından sağlanır.

$h(t, \sigma)$ nin ayrılabilir olduğunu varsayalım ve 22 de verilen gerçekle. Daha sonra kurulum,

$$A(t) = 0, \quad b(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ \vdots \\ v_{1n}(t) \end{bmatrix}, \quad c(t) = [v_{01}(t) \cdots v_{0n}(t)]$$

21 deki $h(t, \sigma)$ için bir gerçekleştirme verir.

Önemli bir soru şunla uğraşır bir çekirdek $h(t, \sigma)$ sabit parametre bir doğrusal durum denkliği tarafından ne zaman gerçekleştirildiği. Diğer bir değişle, bir giriş çıkış gösterimi gerçekleştirme sistemi tarafından ne zaman oluşturulur.

Teori 4.6: çekirdek $h(t, \sigma)$ bir sonlu boyutsal tarafından gerçekleştirilebilir ancak ve ancak sabit ve farksal olarak ayrılabilirse.

Kanıt, koşulların gerekliliği doğrudan $h(t, \sigma)$ formundan takip edilir. Etkili bir kanıt hafiftir, u nedenle çekirdekin sabit, farksal ayrılabilir ve şu şekilde

$$h(t, \sigma) = v_0(t)v_1(\sigma) \quad \text{olduğu özel durumu düşünerek başlıyorum.}$$

İlk adım $T > 0$ almaktır, böylece,

$$q_1 = \int_{-T}^T v_0^2(t) dt > 0$$

Tabii ki, bu gibi bir T nin var olduğu kabul edilebilir, diğer durum da $h(t, \sigma) = 0$ dır ve teori enteresan değildir. Şimdi, sabit, $h(t, \sigma) = h(0, \sigma - t)$ tarafından, böylece

$$\frac{d}{d\sigma} h(t, \sigma) + \frac{d}{dt} h(t, \sigma) = 0$$

Veya

$$v_0(t)\dot{v}_1(\sigma) + \dot{v}_0(t)v_1(\sigma) = 0$$

Bu eşitliği $v_0(t)$ la çarparak ve $-T$ den T ye integralini almak verir ki,

$$q_1 \dot{v}_1(\sigma) + r_1 v_1(\sigma) = 0$$

Şöyle ki,

$$r_1 = \int_{-T}^T v_0(t)\dot{v}_0(t) dt$$

Ama $q_1 > 0$ böylelikle farksal eşitlik açık değildir ve böylece $v_1(\sigma)$ üssel

$$v_1(\sigma) = v_1(0)e^{-(r_1/q_1)\sigma}$$

Daha sonra sabitlik koşulu verir ki,

$$h(t, \sigma) = v_0(0)v_1(0)e^{(r_1/q_1)(t-\sigma)}$$

Diğer bir deyişle çekirdek sabit farksal olarak ayrılabilir ve tek terim ise, basit üssel olmak zorunda. Açıkçası bu çekirdek doğrusal durum eşitliği tarafından gerçekleştirilebilir. Eğer her $v_{0i}(t)$ ve $v_{1i}(t)$ gerçek değerli ise, doğrusal durum eşitliğinin toplanabilir paralel bağlantıları bir doğrusal durum eşitliği tarafından gösterilebilir. Eğer 22 deki fonksiyonlardan bazıları karmaşık değerli ise, eşlenikler kapsamak zorunda olduğundan gerçek katsayı metrisli bir doğrusal durum eşitliği gerçekleştirilmesi bulunabilir.

4.2 Sabit Homojen Sistemlerin Gerçeklemesi

Özellenmiş homojen doğrusal olmayan sistem için, tartışılacak olan problem iki-doğrusal durum eşitliği şeklinde bulunan gerçeklemelerin problemidir. Yani, formun durum eşitliği

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t)u(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0\end{aligned}\quad (23)$$

$x(t)$, $m \times 1$ durum vektörü olmak üzere, her t için R^m durum boşluğunun ve giriş çıkış bir elementi skaldır.

Tabi ki, bir iki-doğrusal durum eşitliği genelde homojen bir giriş çıkış gösterimine sahip değildir. Bu nedenle, bu kısımda ki sonuçlar daha çok özellenmiş iki-doğrusal durum eşitliğini içerir.

23 de ki birletim e kullanılan giriş çıkış gösterimi bölüm 3 de türetildi. İki-doğrusal durum eşitliği bir Volterra sistem gösterimi tarafından tanımlanır,

$$y_n(t) = \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{n-1}} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_1 \quad (24)$$

Çekirdek şu şekilde verilmek üzere

$$h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = ce^{A(t-\sigma_1)} De^{A(\sigma_1-\sigma_2)} D \cdots De^{A(\sigma_{n-1}-\sigma_n)} b, \quad t \geq \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (25)$$

Bir iki-doğrusal gerçekleştirme teorisini geliştirmek amacıyla, ana yoğunlaşma düzenli çekirdek ve düzenli aktarım fonksiyonları üzerinde olacak. 25 den düzenli çekirdeği elde etmek için ilk adım kısım 1.2 de tanımlandığı gibi sabitliği yüklemektir. Bu da sabit bir üçgensel çekirdek

$$\begin{aligned}g_{tri}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= h(0, -\sigma_1, \dots, -\sigma_n) \\ &= ce^{A\sigma_1} De^{A(\sigma_2-\sigma_1)} D \cdots De^{A(\sigma_n-\sigma_{n-1})} b, \\ &\quad \sigma_n \geq \sigma_{n-1} \geq \cdots \geq \sigma_1 \geq 0\end{aligned}\quad (26)$$

yi verir. Eşlik 26 yı ilk üçgensel payda üzerine bir üçgensel çekirdek olarak yeniden yazarsak

$$h_{tri}(t_1, \dots, t_n) = ce^{At_n} De^{A(t_{n-1}-t_n)} D \cdots De^{A(t_1-t_2)} b, \quad t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n \geq 0 \quad (27) \quad \text{verir.}$$

Böylece, n dereceli düzenli çekirdek homojen alt sistemi iki-doğrusal durum eşitliği 23 e ilintili olan

$$h_{reg}(t_1, \dots, t_n) = ce^{At_n} D e^{At_{n-1}} D \dots D e^{At_1} b \quad (28)$$

Tabi ki, skalar terimler $h_{reg}(t_1, \dots, t_n)$ şeklinde yazılan çıkış daha ağırdır. Gerçekte bu tür terimler gösterir ki bir iki-doğrusal durum eşitliğine ilintili düzenli çekirdek şu şekilde yazılabilir.

$$h_{reg}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{j_1=1}^{u_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} \sum_{j_n=1}^{u_n} a_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \frac{t_1^{j_1-1} \dots t_n^{j_n-1}}{(j_1-1)! \dots (j_n-1)!} e^{-\lambda_{i_1} t_1} \dots e^{-\lambda_{i_n} t_n} \quad (29)$$

Çeşitli katsayılar ve üsler bu ifade deki karmaşık olabilir, ama düzenli çekirdek gerçek olduğu için, eşleme koşulları tatmin edilmeli.

Açıkçası, bir iki doğrusallı durum eşitliği için düzenli çekirdek kısmısal olarak basit şekildedir. Düzenli aktarım fonksiyonu da ayrıca basit şekildedir, adlandırılan

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_n) = c (s_n I - A)^{-1} D (s_{n-1} I - A)^{-1} D \dots D (s_1 I - A)^{-1} b \quad (30)$$

İki doğrusal durum eşitliği için Bir düzenli aktarım fonksiyonları şu şekilde gösterilen,

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_n) = \frac{P(s_1, \dots, s_n)}{Q_1(s_1) \dots Q_n(s_n)} \quad (31) \quad \text{dir.}$$

Böylelikle, n derece homojen sistem bir katı uygunluk tarafından tanımlanan düzenli aktarım fonksiyonu 31 den ,

$$P(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n-1} p_{i_1 \dots i_n} s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} \quad (32)$$

Ve $Q_j(s_j)$ bir tekil $m_j, j = 1, \dots, n$ dereceli polinomudur. Bir ilintili iki-doğrusal gerçeklemeyi oluşturmak için matrisin faktoryelinde payda doğruluğu yazılarak,

$$P(s_1, \dots, s_n) = S_n S_{n-1} \dots S_1 P \quad (33) \quad \text{dir.}$$

Örnek 4.2 $P(s_1, s_2, s_3) = s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 + s_2 + 1$ polinomu için

s_1 üzerine bağımlılığı etkenlemek için

$$P(s_1, s_2, s_3) = [1 \quad s_3] \begin{bmatrix} s_1 s_2 + s_2 + 1 \\ s_1 s_2 + s_1 + s_2 \end{bmatrix} \text{ yazılır.}$$

Şimdi, her polinom üzerinde ki s_2 bağımlılığı bu ifadenin sağ tarafında ki aynı şekilde etkenlenebilir

$$P(s_1, s_2, s_3) = [1 \quad s_3] \begin{bmatrix} 1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s_1+1 \\ s_1 \\ s_1+1 \end{bmatrix}$$

Son adım şöyle olmalı ki

$$P(s_1, s_2, s_3) = [1 \quad s_3] \begin{bmatrix} 1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

33 ün genel gösterimi için 32 takip eden şekilde gider.

$$S_n = [1 \quad s_n \cdots s_n^{m_n-1}] \quad (34) \text{ olsun}$$

Ve $j = 1, \dots, n-1$ için S_j i tanımla $(m_n \cdots m_{j+1}) \times (m_n \cdots m_j)$ matrisi i. inci satırdan

$$[0_{1 \times (m_j - m_j)} \quad 1 \quad s_j \cdots s_j^{m_j-1} \quad 0_{1 \times (m_n \cdots m_j - m_j)}] \quad (35)$$

Daha sonra P sütun vektörüdür

$$P' = [p_{0 \cdots 0} \quad p_{10 \cdots 0} \cdots p_{m_1-1,0 \cdots 0} \quad p_{010 \cdots 0} \quad p_{110 \cdots 0} \cdots p_{m_1-1,10 \cdots 0} \cdots p_{0m_2-1, \dots, m_n-1} \cdots p_{m_1-1, \dots, m_n-1}] \quad (36)$$

tarafından özellenir.

Bu pay faktoryelleme prosedürünün sonucu şu şekilde yazılabilen düzenli aktarımdır

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_n) = G_n(s_n) \cdots G_1(s_1) \quad (37)$$

Öyle ki,

$$G_1(s_1) = \frac{S_1 P}{Q_1(s_1)}, \quad G_j(s_j) = \frac{S_j}{Q_j(s_j)}, \quad j = 2, \dots, n \quad (38)$$

katı şekilde uygun matris fonksiyonları. Bu nedenle her $G_j(s_j)$ bir doğrusal gerçeklemeye sahiptir ve şu şekilde yazılabilir

$$G_j(s_j) = C_j(s_j I - A_j)^{-1} B_j \quad (39)$$

Şimdi iki doğrusal durum eşitliğini düşünelim

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_2 C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_3 C_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n C_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \cdots 0 C_n] \quad (40)$$

tarafından özellenen.

Bu iki doğrusal durum eşitliği için düzenli aktarım fonksiyonları 30 aracılığıyla hesaplanabilir. A daki blok köşegeninden dolayı

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (sI - A_n)^{-1} \end{bmatrix}$$

Böylece ileri doğru hesaplaması verir ki,

$$\begin{aligned} H_{reg}(s_1, \dots, s_k) &= 0, \quad k = 1, \dots, n-1, n+1, n+2, \dots \\ H_{reg}(s_1, \dots, s_n) &= C_n (s_n I - A_n)^{-1} B_n C_{n-1} (s_{n-1} I - A_{n-1})^{-1} B_{n-1} C_{n-2} \\ &\quad \cdots B_2 C_1 (s_1 I - A_1)^{-1} B_1 \\ &= G_n(s_n) \cdots G_1(s_1) \end{aligned} \quad (41)$$

Böylece, 40, verilen aktarım fonksiyonu için n-dereceli homojen iki-doğrusal gerçekleştirir. Gelişme takip eden şekilde sonlandırılabilir.

Teori 4.7 Bir n derece homojen sistem $H_{reg}(s_1, \dots, s_n)$ düzenli aktarım fonksiyonu tarafından tanımlanan iki doğrusal gerçekleştirir.

Teori 4.7 deki gerçekleştirilme koşuluna ek olarak yukarıdaki gelişme şunu belirtir ki, bir n derece homojen sistem için iki-doğrusal gerçekleştirme problemi temel olarak bir n doğrusal gerçekleştirme problemi dizisi içerir. Ama basit faktoriyelme prosedürü genellikle yüksek değerli bir iki doğrusal gerçeklemeye yol açar minimal doğrusal gerçekleştirme her $G_j(s_j)$ için kullanılsa bile. Bir minimal kenar iki doğrusal gerçekleştirme yapmak için, daha karmaşık faktoriyelme fonksiyonu prosedürü kullanılabilir.

31 de verilen bir düzenli aktarım fonksiyonu için iki doğrusal gerçekleştirme teorisine alternatif bir yaklaşım doğrusal durumdaki ile aynı, bir soyut kaydırma gerçekleştirilmesinin kavramını içerir. Doğrudan minimal-kenar iki-doğrusal gerçekleştirilmesini sağladığından ve polinomik ve Volterra sistemleri için ana gereç olacağından bu yaklaşımı detaylı bir şekilde göstereceğim. Bu kayma gerçekleştirme yaklaşımı $H_{reg}(s_1, \dots, s_n)$ nin negatif kuvvet serisi gösterimi şekliyle en basit şekilde tanımlanabilir, şöyle ki,

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{i_1, \dots, i_n} s_1^{-(i_1+1)} \dots s_n^{-(i_n+1)} \quad (42)$$

30'un katı uygun, fark edilebilir aktarım fonksiyonları için, bu seri gösteriminin geçerliliği (2) genişlemesinin tekrar eden kullanımıdır. Kayma gerçekleştirme yaklaşımı için genel ayarlar düzenli aktarım fonksiyonu sınıfından alınabilir, öyle ki teori 4.7 den açık olduğu gibi sonsuzda analitik olan, her değişken için sonsuzda sıfırlara sahip olan. Her hangi bir oranda, şekil 30 için serileri ve 42 yi karşılaştırmak gösterir ki takip ettiği şekilde temel matematik problemleri durumlanabilir. $m \times m, m \times m, m \times 1$ ve $1 \times m$ kenarlarının A, D, b ve c matrislerini bul şöyle ki, negatif olmayan tüm tamsayılar $j_1, j_2, j_3, \dots$ için,

$$cA^{j_1}DA^{j_2}D \dots DA^{j_n}b = \begin{cases} h_{j_1, \dots, j_n}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (43)$$

Doğrusal durumla benzer olarak, verilen düzenli aktarım fonksiyonuna ilintili bir m-kenarlı iki-doğrusal gerçeklemeyi göstermek için (A, D, b, c, R^m) kavramı ile gösterimi uygundur.

K değişkenli her hangi bir negatif kuvvet serisi için

$$V(s_1, \dots, s_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} v_{i_1, \dots, i_k} s_1^{-(i_1+1)} \dots s_k^{-(i_k+1)} \quad (44)$$

Kayma işletmeni S yi tanıtır

$$SV(s_1, \dots, s_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} v_{i_1+1, i_2, \dots, i_k} s_1^{-(i_1+1)} \dots s_k^{-(i_k+1)} \quad (45)$$

Şuna dikkat et ki, kayma sadece s_1 değişkenini içerir ve $k = 1$ için kısım 4.1 de tanımlanan kayma işletmenine alçalır. Açıkça, S bir doğrusal işletmen, ve $SV(s)$ bir k değişkenli negatif kuvvet serisidir, böylece $S^j V(s)$ iyi tanımlanmıştır.

Ayrıca 44 de $V(s_1, \dots, s_k)$ üzerinde belirlenmiş bir indeks işlemcisi T,

$$TV(s_1, \dots, s_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} v_{0, i_1, \dots, i_{k-1}} s_1^{-(i_1+1)} \dots s_{k-1}^{-(i_{k-1}+1)} \quad (46)$$

$k > 1$ için ve $TV(s_1) = 0$ $k=1$ için. T bir doğrusal işlemci ve $TV(s_1, \dots, s_k)$ $k - 1$ değişkenli bir negatif kuvvet değişkeni. Böylece, çoğu k adımından sonra 0 elde edilse bile, T tekrarlı bir şekilde uygulanabilir. Takip eden gelişme doğrultusunda, negatif kuvvet serilerinin alanına ve değişken sayılarına aldırılmayarak semboller S ve T kullanılacaktır.

Şimdi, verilen bir n derece homojen sistemi negatif kuvvet serileri şeklinde $H_{reg}(s_1, \dots, s_n)$ düzenli aktarım fonksiyonu tarafından belirlensin. Negatif kuvvet serilerinin bir doğrusal uzay belirle şuna göre,

$$U_1 = \text{span} \{ H_{reg}(s_1, \dots, s_n), SH_{reg}(s_1, \dots, s_n), S^2 H_{reg}(s_1, \dots, s_n), \dots \} \quad (47)$$

TU_1 notasyonunu T altında ki U_1 görüntüsü için

$$U_2 = \text{span} \{ TU_1, STU_1, S^2 TU_1, \dots \}$$

$$U_n = \text{span} \{ TU_{n-1}, STU_{n-1}, S^2 TU_{n-1}, \dots \} \quad (48)$$

olsun. Daha sonra $U_1, \dots, U_{n+1-j}, j = 1, \dots, n$ ve $U_i \cap U_j = 0$, değişkenli bir negatif kuvvet serisinin doğrusal uzayıdır. Dahası, $SU_j \subset U_j$ ve $TU_j \subset U_{j+1}$ olan S ye göre değişmezdir.

Şimdi doğrusal uzay

$$U = \text{span} \{ U_1, \dots, U_n \} \quad (49) \text{ yi düşünelim.}$$

U nun elementleri n değişkenli veya daha az değişkenli negatif kuvvet serileridir ve S ve T her ikisi de U dan U ya doğrusal işlemler olarak gösterilebilir. İnitilizasyon işlemcisini $L:R \rightarrow U$ i verilen düzenli aktarım fonksiyonu şeklinde tanımla,

$$Lr = H_{reg}(s_1, \dots, s_n)r \quad (50)$$

Ve değerlendirme işlemcisini $E:U \rightarrow R$

$$EV(s_1, \dots, s_k) = \begin{cases} 0, & k > 1 \\ EV(s_1), & k = 1 \end{cases} \quad (51)$$

$EV(s_1)$, 10 da tanımlanan doğrusal durum için değerlendirme işlemcisi olmak üzere.

Kolayca türevlenen formülleri

$$\begin{aligned} SV(s_1, \dots, s_k) &= s_1 V(s_1, \dots, s_k) - [s_1 V(s_1, \dots, s_k)]|_{s_1=\infty} \\ TV(s_1, \dots, s_k) &= [s_1 V(s_1, \dots, s_k)]|_{\substack{s_1=\infty \\ s_2=s_1 \\ \vdots \\ s_k=s_{k-1}}} \\ EV(s_1, \dots, s_k) &= \begin{cases} 0, & k > 1 \\ [s_1 V(s_1)]|_{s_1=\infty}, & k = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

Bu yorumlar hesaplamalar için çok önemlidir, negatif kuvvet serisi gösterimleri gerçek işlem için yeterli olmadığından dolayı.

Verilen düzenli aktarım fonksiyonu (S, T, L, E, U) bir soyut gerçekleştirme olduğunu göstermek olağanüstü şekilde basittir. Özdeşlik,

$$ES^{j_n} TS^{j_{n-1}} T \dots TS^{j_1} L = h_{j_1, \dots, j_n} \quad (53)$$

Takip eden hesaplama dizisinde doğrulanır.

$$\begin{aligned}
S^{j_1} L &= S^{j_1} H_{reg}(s_1, \dots, s_n) \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{i_1+j_1, i_2, \dots, i_n} s_1^{-(i_1+1)} s_2^{-(i_2+1)} \dots s_n^{-(i_n+1)} \\
TS^{j_1} L &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} h_{j_1, i_1, \dots, i_{n-1}} s_1^{-(i_1+1)} \dots s_{n-1}^{-(i_{n-1}+1)} \\
S^{j_2} TS^{j_1} L &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} h_{j_1, i_1+j_2, i_1, \dots, i_{n-1}} s_1^{-(i_1+1)} s_2^{-(i_2+1)} \dots s_{n-1}^{-(i_{n-1}+1)} \\
TS^{j_2} TS^{j_1} L &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-2}=0}^{\infty} h_{j_1, j_2, i_1, \dots, i_{n-2}} s_1^{-(i_1+1)} \dots s_{n-2}^{-(i_{n-2}+1)} \\
S^{j_n} TS^{j_{n-1}} T \dots TS^{j_1} L &= \sum_{i_1=0}^{\infty} h_{j_1, \dots, j_{n-1}, i_1+j_n} s_1^{-(i_1+1)} \\
ES^{j_n} TS^{j_{n-1}} T \dots TS^{j_1} L &= h_{j_1, \dots, j_n}
\end{aligned}$$

Şunu göstermek kolay ki, 4.3 de ki kalan terimler gerçekte 0 dır. Eğer $k < n$ ise, bağımsız değişkeni bir değişkenden fazla olacağından, E işlemcisi işi yapar. Eğer $k > n$ ise, T ler 0 verecektir. Şimdi gerçekleştirme prosedürü tanımlamayı içerir eğer U sonlu kenarlı ise ve doğrusal operatörler S, T, E , ve L için matris gösterimlerini bulmak, U , $\mathbb{R}^m$ le tarafından yerleştirildiği zamanda öyleyse. Takip eden sonuç ve onun kanıtı 4.1 i anımsatmakta, kanıt 4.3 e kadar ertelenmesine rağmen.

Teori 4.8 düzenli aktarım fonksiyonu $H_{reg}(s_1, \dots, s_n)$ tarafından belirlenmiş bir n derece homojen sistem iki doğrusal gerçekleyebilir ancak ve ancak U bir sonlu kenarlı ise. Dahası, sistem iki doğrusal gerçekleyebilirse, (S, T, L, E, U) minimal iki doğrusal gerçekleştirilmez.

U bir sonlu kenarlı olduğu zaman matris gerçekleştirilmesini bulmak için, U yu takip eden şekilde değiştirmek uygundur. Eğer kenar $U=m$, $\mathbb{R}^m$ için standart sıralanmış temelleri seç şöyle ki, $e_1, \dots, e_m$, U_1 in doğrusal olarak bağımsız elementlerini gösterir, $e_{m+1}, \dots, e_{m_2}$, U_2 nin doğrusal olarak bağımsız elementlerini gösterir ve bu şekilde devam eden. Daha sonra şu gerçekten, $U_1, \dots, U_n$, bağlantısızdır ve daha önce değişmez özelliklerden bahsedildiği gibi, S ve T için matris gösterimleri

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (54)
\end{aligned}$$

Ayrıca, L nin görüntüsünün ve E nin boş uzayının özel şeklinden, matris gösterimi şu şekilde olacaktır,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 0 \ \cdots \ c_n] \quad (55)$$

Örnek 4.3 verilen iki doğrusal gerçeklemeli düzenli aktarım fonksiyonu

$$H_{reg}(s_1, s_2) = \frac{1}{(s_1+2)(s_2+3)} = \frac{1}{s_1 s_2 + 3s_1 + 2s_2 + 6}$$

Gerçekleme yapımında ki ilk adım U_1 ve U_2 uzaylarını hesaplamaktır.

$$\begin{aligned} SH_{reg}(s_1, s_2) &= \frac{s_1}{s_1 s_2 + 3s_1 + 2s_2 + 6} - \frac{1}{s_2 + 3} \\ &= \frac{-2}{s_1 s_2 + 3s_1 + 2s_2 + 6} = -2H_{reg}(s_1, s_2) \end{aligned}$$

olduğundan şu açıktır ki

$$U_1 = \text{span} \left\{ \frac{1}{s_1 s_2 + 3s_1 + 2s_2 + 6} \right\}$$

U_2 yi hesaplamak için, kaydet ki,

$$\begin{aligned} TH_{reg}(s_1, s_2) &= \left[\frac{s_1}{s_1 s_2 + 3s_1 + 2s_2 + 6} \right] \Big|_{s_2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{s_1 + 3} \\ STH_{reg}(s_1, s_2) &= \frac{s_1}{s_1 + 3} - 1 = \frac{-3}{s_1 + 3} \end{aligned}$$

Böylece,

$$U_2 = \text{span} \left\{ \frac{1}{s_1 + 3} \right\}$$

Ve değiştirmeyi yaparak

$$U_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad U_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Metris gösterimi S,T,L ve E takip eden şekilde hesaplanabilir. eğer S için A metris gösterimiye, daha sonra

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Eğer D, T için matris gösterimiye,

$$D \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şu açıktır ki L nin matris gösterimi,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ve son olarak,

$$E \frac{1}{s_1 s_2 + 3s_1 + 2s_2 + 6} = 0, \quad E \frac{1}{s_1 + 3} = 1$$

olduğundan, E için matris gösterimi,

$$c = [0 \quad 1]$$

Şu açıktır ki, homojen sistemler için tartışılan iki gerçekleştirme problemi için iki yaklaşım, doğrusal gerçekleştirme teorisi için iki ana yaklaşıma paraleldir. Kaydırma gerçekleştirme yaklaşımı rasyonel fonksiyonların seri gösterimleri üzerine temellenmiştir, diğer yaklaşım rasyonel aktarım fonksiyonlarında doğrudan polinomların kullanımları dayanmaktadır. Ek olarak, doğrusal olmayan sistemler için kayma gerçekleştirme yaklaşımı doğrusaldan farkı olmayan davranış metrisi terimi şeklinde yeniden ifadelendirilebilir. 4.3 de formülleme gösterilecektir.

Durum vektörü $x(t)$ yi şu şekilde bölmelersek,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$x_j(t)$, $m_j \times 1$ olmak üzere, blok şekil gerçekleştirme durum eşitliği seti şeklinde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + b_1u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= A_{22}x_2(t) + D_{21}x_1(t)u(t) \\
\dot{x}_n(t) &= A_{nn}x_n(t) + D_{n,n-1}x_{n-1}(t)u(t) \\
y(t) &= c_nx_n(t)
\end{aligned} \tag{57}$$

Daha sonra gerçekleştirme fig.4.1 de gösterilen çoklu-giriş, çoklu-çıkış, doğrusal sistemler ve vektör çarpılarının ışın bağlantısını ilişkiler.

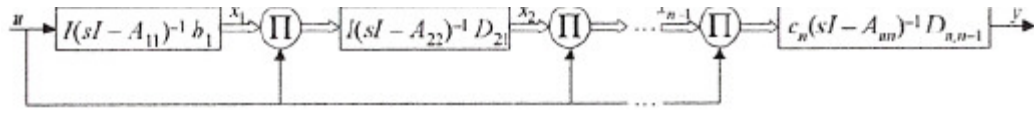


Figure 4.1. An interconnection structured realization.

4.3 Durağan Polinomsal ve Volterra Sistemlerinin Gerçeklemesi

Polinomsal sistem durumları öncelikli ve çok detaylı olarak tartışılacak. Tekrar sonlu-kenar iki-doğrusal durumlar eşitlik gerçeklemeleri ilgi alanımızda, özellikle minimal kenarlar.

Düzenli aktarım fonksiyonu dizisi tarafından belirlenen bir N derece polinomik sistemi varsayalım.

$$(H(s_1), H_{reg}(s_1, s_2), \dots, H_{reg}(s_1, \dots, s_N), 0, \dots) \tag{58}$$

N den büyük dereceli aktarım fonksiyonları sıfırı işaret etmek üzere. İlk sonuç şunu gösterir ki, temel gerçekleyebilme durumu polinomlar için doğrudan takip eder.

Teori 4.9-- 58 de özellenen polinomsal sistem iki-doğrusaldır ancak ve ancak her düzenli aktarım fonksiyonu katıca uygun gerçekleştirilebilir fonksiyonsa.

Kanıt: her $H_{reg}(s_1, \dots, s_j)$ aktarım fonksiyonunun katıca uygun ve gerçekleştirilebilir olduğunu varsayalım. Daha sonra kısım 4.2 den şu açıktır ki, her biri j-derece homojen iki-doğrusal durum eşitliği tarafından gerçekleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j(t) &= A_jx_j(t) + D_jx_j(t)u(t) + b_ju(t) \\
y_j(t) &= c_jx_j(t)
\end{aligned} \tag{59}$$

$j = 1, \dots, N$ ve $D_1 = 0$ olmak üzere. şimdi de bu durum eşitliklerinin toplamsal paralel bağlantı hesaba kat. Böyle bir bağlantı blok köşegensel iki doğrusal durum eşitliği (A, D, b, c, R^m) tarafından tanımlanabilir.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_N \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [c_1 \cdots c_N] x(t)$$

Blok köşegen sel şeklini A ve D için kullanarak, Şu açıktır ki k-derece aktarım fonksiyonunu hesaplamak

$$c(s_k I - A)^{-1} D \cdots D(s_1 I - A)^{-1} b = \sum_{j=1}^N c_j (s_k I - A_j)^{-1} D_j \cdots D_j (s_1 I - A_j)^{-1} b_j$$

Ama j.inci iki-doğrusal durum eşitliği j derecenin homojenidir, Şöyle ki sağ taraftaki bütün toplamalar j=k hariç sıfırdır. Böylece,

$$c(s_k I - A)^{-1} D \cdots D(s_1 I - A)^{-1} b = c_k (s_k I - A_k)^{-1} D_k \cdots D_k (s_1 I - A_k)^{-1} b_k$$

$$= \begin{cases} H_{reg}(s_1, \dots, s_k), & k = 1, \dots, N \\ 0, & k > N \end{cases}$$

Ve (A, D, b, c, R^m) bir iki-doğrusal gerçektelemedir verilen polinomsal sistem için.

Şimdi polinomsal sistemin iki doğrusal olduğunu varsayalım ve dahası (A, D, b, c, R^m) böyle bir gerçektele. Daha sonra, her n derece düzenli aktarım fonksiyonunu hesaplayarak katıca uygun fark edilebilir fonksiyondur.

$$c(s_n I - A)^{-1} D \cdots D(s_1 I - A)^{-1} b, \quad n = 1, \dots, N$$

böylece kanıt tamamlandı. Bir N derece polinomsal sistemi iki-doğrusaldır ancak ve ancak ger düzenli kernel 28 ve 29 da verilen üssel şekle sahipse.

Polinomsal sistemler için temel iki-doğrusal gerçektelebilme sonuçları ayrıca bir kayma gerçektelemesi yaklaŐımıyla da geliştirilebilir, Şu varsayıma dayanarak ki 58 deki her düzenli aktarım fonksiyonu negatif kuvvet serisi şeklinde yazılabilir

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} h_{i_1 \dots i_k} s_1^{-(i_1+1)} \cdots s_k^{-(i_k+1)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (60)$$

Tabi ki, bu varsayım iki doğrusal gerçektelemelere kalırsa hiçbir genelleme kaybı olmaksızın yapılabilir. Kısım 4.2 deki formüllemeden açıktır ki, tüm negatif olmayan $j_1, j_2, \dots$ tamsayıları için bir iki doğrusal gerçekteleyici oluşturmak A, D, b ve c matrislerini bulmayı içerir.

$$cA^{j_k} DA^{j_{k-1}} D \cdots DA^{j_1} b = \begin{cases} h_{j_1 \dots j_k}, & k = 1, \dots, N \\ 0, & k > N \end{cases} \quad (61)$$

Bu bölümde genelde olduğu gibi, ilk adım bir soyut kayma gerçekleştirilmesidir.

Verilen herhangi negatif kuvvet serilerinin sonlu dizisi

$$(V_1(s_1), V_2(s_1, s_2), V_3(s_1, s_2, s_3), \dots) \quad (62)$$

Kayma işlemcisi S yi belirle

$$\begin{aligned} S(V_1(s_1), V_2(s_1, s_2), V_3(s_1, s_2, s_3), \dots) \\ = (SV_1(s_1), SV_2(s_1, s_2), SV_3(s_1, s_2, s_3), \dots) \end{aligned} \quad (63)$$

tarafından.

$SV_k(s_1, \dots, s_k)$, 44 ve 45 de belirlenen kayma işlemcisi olmak üzere. Benzer olarak, indeks işlemcisi T yi

$$\begin{aligned} T(V_1(s_1), V_2(s_1, s_2), V_3(s_1, s_2, s_3), \dots) \\ = (TV_2(s_1, s_2), TV_3(s_1, s_2, s_3), \dots) \end{aligned} \quad (64)$$

tarafından $TV_k(s_1, \dots, s_k)$, 46 da belirlenen indeks işlemcisi olmak üzere tanımla.

Daha fazla ilerlemek için, şu notasyonu kullanmak uygundur

$$\hat{H}(s_1, \dots, s_N) = (H(s_1), H_{reg}(s_1, s_2), \dots, H_{reg}(s_1, \dots, s_N), 0, \dots) \quad (65)$$

Daha sonra, takip eden negatif kuvvet serilerinin sonlu dizisinin doğrusal uzayını tanımla

$$\begin{aligned} U_1 &= \text{span} \{ \hat{H}(s_1, \dots, s_N), S\hat{H}(s_1, \dots, s_N), S^2\hat{H}(s_1, \dots, s_N), \dots \} \\ U_2 &= \text{span} \{ TU_1, STU_1, S^2TU_1, \dots \} \\ U_N &= \text{span} \{ TU_{N-1}, STU_{N-1}, S^2TU_{N-1}, \dots \} \end{aligned} \quad (66)$$

$U = \text{span} \{ U_1, \dots, U_N \}$ olarak, S ve T, U dan U ya işlemler olarak gösterilebilir. Başlangıç yapma işlemcisi $L: R \rightarrow U$ yi verilen $H(s_1, \dots, s_N)$ şeklinde tanımla

$$Lr = \hat{H}(s_1, \dots, s_N)r \quad (67)$$

Ve değerlendirme işlemcisi $E: U \rightarrow R$ yu

$$E(V_1(s_1), V_2(s_1, s_2), V_3(s_1, s_2, s_3), \dots) = EV_1(s_1) \quad (68)$$

$EV_1(s_1)$ doğrusal durumda tanımlandığı gibi olmak üzere.

Şimdi hesaplamalar, (S, T, L, E, U) , verilen $H(s_1, \dots, s_N)$ nin soyut iki doğrusal gerçekleştirme olduğunu göstermek için homojen durumun içindeki hesaplamalardan doğruca takip eder.

Örneğin,

Teorem 4.10 : Düzenli $H(s_1, \dots, s_N)$ fonksiyonları transferinin dizisi olarak tanımlanan bir N derece polinom sistemi çift doğrusal gerçekleştirebilir ancak U sınırlı ebatlıdır. Bunun yanında , eğer sistem çift doğrusal gerçekleştirebilirse , sonra (S, T, L, E, U) en az çift doğrusal gerçekleştirebilir.

İspatı , $H(s_1, \dots, s_N)$ tarafından tanımlanan polinom sistem çift doğrusal gerçekleştirebilir , bu (A, D, b, c, R^m) hiç çift doğrusal sistem gerçekleştirmez, ve bu (S, T, L, E, U) sistemin değişimi gerçekleşir. W, negatif güç serilerinin bütün dizilerinin doğrusal uzayı (62) gibi izin verir. Sonra

$$\Phi(x) = (c(s_1 I - A)^{-1} x, c(s_2 I - A)^{-1} D(s_1 I - A)^{-1} x, \\ c(s_3 I - A)^{-1} D(s_2 I - A)^{-1} D(s_1 I - A)^{-1} x, \dots)$$

tarafından kısalık için bir doğrusal operatör $\Phi: R^m \rightarrow W$ tanımlamayı kesinlikle uygun bir dizi gibi sağ taraf yazarım , benzer negatif güç serilerinin yerine fonksiyonlar tanımlanabilir. Bundan başka , homojen durumda değişim operatörün tanımını kullanma,

$$c(s_k I - A)^{-1} D \dots D(s_1 I - A)^{-1} A b \\ = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} c A^{i_k} D \dots D A^{i_1+1} b s_1^{-(i_1+1)} \dots s_k^{-(i_k+1)} \\ = S \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} c A^{i_k} D \dots D A^{i_1} b s_1^{-(i_1+1)} \dots s_k^{-(i_k+1)} \\ = S H_{reg}(s_1, \dots, s_k), \quad k = 1, \dots, N$$

Düzenli transfer fonksiyonların $\hat{H}(s_1, \dots, s_N)$ dizisine bu hesaplamayı uzatmaya bu

$$\Phi(Ab) = \hat{S} \hat{H}(s_1, \dots, s_N)$$

..

gösterilir. T'nin tanımını kullanmada bir benzer yolda ,

$$\begin{aligned}
c(s_{k-1}I - A)^{-1}D \cdots D(s_1I - A)^{-1}Db \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} cA^{i_{k-1}}D \cdots DA^{i_1}Db s_1^{-(i_1+1)} \cdots s_{k-1}^{-(i_{k-1}+1)} \\
&= T \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} cA^{i_k}D \cdots DA^{i_1}b s_1^{-(i_1+1)} \cdots s_k^{-(i_k+1)} \\
&= TH_{reg}(s_1, \dots, s_k), \quad k = 2, \dots, N
\end{aligned}$$

Tekrar ,

$$\hat{H}(s_1, \dots, s_N)$$

e göre genişletildiğinde bu hesaplama ,

$\Phi(Db) = TH(s_1, \dots, s_N)$ anlamına gelir. Bu sonuçları birleştirme $U \subset R[\Phi]$ gösteren

$$\Phi(A^{i_{n-1}}D \cdots DA^{i_1}b) = S^{i_{n-1}}T \cdots TS^{i_1}\hat{H}(s_1, \dots, s_N), \quad n = 1, \dots, N$$

verir. Sonra , Φ bir m ebatlı boşluğun üstünde bir doğrusal haritadır , o ebat $U \leq m$ takip eder. Böylece , U sınırlı ebatlıdır , ve ayrıca soyut değişim gerçekleştirme en azdır ondan sonra U 'nun ebatı $\hat{H}(s_1, \dots, s_N)$ 'nin herhangi bir diğer çift doğrusal tanımlamanın uzay hacimli durumundan daha büyük değildir.

Şimdi farz edelim ki , U sınırlı boyutta m 'ye sahip , aşağıdaki çizim $\hat{H}(s_1, \dots, s_N)$ 'nin en az çift doğrusal gerçekleştirme (A, D, b, c, R^m) 'ı sağlar. Standart düzenli esas seçimlerle alan U by R^m 'ı yenisiyle değiştirmek U_1 'in doğrusal olarak bağımsız elementleri için $e_1, \dots, e_{m_1}$, U_2 'nin fazladan doğrusal olarak bağımsız elementleri için $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$, vesaire , aşağıdaki gibi bir gerçekleştirme verir. $SU_j \subset \text{span} \{U_1, \dots, U_j\}$,den sonra , o matris temsili belli olur zira S

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1M} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{MM} \end{bmatrix} \quad (70)$$

A_{jj} is $m_j \times m_j$ olan üç köşeli blok şekline sahip olacak. Ayrıca $TU_j \subset \text{span} \{U_1, \dots, U_{j+1}\}$ matris temsili anlamına gelir zira T

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1,M-1} & D_{1M} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2,M-1} & D_{2M} \\ 0 & D_{32} & \cdots & D_{3,M-1} & D_{3M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{M,M-1} & D_{MM} \end{bmatrix} \quad (71)$$

A 'da bunlara göre kısımlara ayrılmış bloklar olan blok (hemen hemen üç köşeli) şekline sahip olacak. (Uyarı: Bu $M (\leq N)$ bloklar N 'den daha az ziyade gerekli olur. Sebebi bir özellik U_j , $\text{span} \{U_1, \dots, U_{j-1}\}$ içermelidir.) L için matris temsili açıkça blok biçiminde olacak

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Ve E için matris temsili , her c_{1j} , $1 \times m_j$ olarak elde edilen

$$c = [c_{11} \cdots c_{1M}] \quad (73)$$

her U_j de E 'ye etkisi hesaplama tarafından bulunur.

Örnek 4.6: 2 derece polinom sistemi göz önüne alarak düzenli transfer fonksiyonları tarafından tanımla

$$\hat{H}(s_1, s_2) = \left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{1}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \cdots \right)$$

U_1 bul

hesapla

$$S\hat{H}(s_1, s_2) = \left(\frac{-1}{s_1+1}, \frac{-2}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots \right)$$

$$S^2\hat{H}(s_1, s_2) = \left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{4}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots \right)$$

$$= -2\hat{H}(s_1, s_2) - 3S\hat{H}(s_1, s_2)$$

Böylece ,

$$U_1 = \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{1}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots \right), \left(\frac{-1}{s_1+1}, \frac{-2}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots \right) \right\}$$

T 'nin altında U_1 için bu temel elementlerin görüntüsü U_2 'i bulmak için hesaplanmalı , ve sonra daha sonraki görüntü tekrarlanan vardiğerlerin altında hesaplanmalı.

$$T\hat{H}(s_1, s_2) = T\left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{1}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots\right) = \left(\frac{1}{s_1+3}, 0, \dots\right)$$

$$\begin{aligned} TS\hat{H}(s_1, s_2) &= T\left(\frac{-1}{s_1+1}, \frac{-2}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots\right) = \left(\frac{-2}{s_1+3}, 0, \dots\right) \\ &= -2T\hat{H}(s_1, s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ST\hat{H}(s_1, s_2) &= S\left(\frac{1}{s_1+3}, 0, \dots\right) = \left(\frac{-3}{s_1+3}, 0, \dots\right) \\ &= -3T\hat{H}(s_1, s_2) \end{aligned}$$

Böylece,

$$U_2 = \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{s_1+3}, 0, \dots \right) \right\}$$

Şimdi R^3 tarafından $U = \text{span} \{U_1, U_2\}$ yerine koyulur ve standart düzenli temel elementlere göre seçmek

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{1}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots \right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{-1}{s_1+1}, \frac{-2}{(s_1+2)(s_2+3)}, 0, \dots \right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{s_1+3}, 0, \dots \right)$$

Bu matris temsilleri sağlar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hesaplamalar $\hat{E}\hat{H}(s_1, s_2) = 1, \hat{E}\hat{S}\hat{H}(s_1, s_2) = -1, \hat{E}\hat{T}\hat{H}(s_1, s_2) = 1$ verir
 $c = [1 \quad -1 \quad 1]$

Ve , sonuç olarak,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi verilmiş Volterra sistemi için çift doğrusal gerçekleştirme problemini göz önüne almalı. O farz edelim ki gösterimde yazılı düzenli transfer fonksiyonlara göre belirlenmiş bir sistem.

$$H(s_1, \dots, s_\infty) = (H(s_1), H_{reg}(s_1, s_2), H_{reg}(s_1, s_2, s_3), \dots) \quad (74)$$

Her zaman olduğu gibi , $\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)$ negatif güç serilerinin bir dizisi gibi gözükecek , her biri (60)'daki şekli alır. Bu perspektiften , bulunmuş A, D, b matrislerini içeren Volterra sistemi için çift doğrusal gerçekleştirme problemi açıktır , ve c öyle ki bütün $k = 1, 2, \dots$, ve bütün negatif olmayan numaralar $j_1, \dots, j_k$ içindir ,

$$cA^{j_k}D \dots DA^{j_1}b = h_{j_1 \dots j_k} \quad (75)$$

$\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)$ için soyut değişim gerçekleştirmenin yapımı polinom sistem durumundayken aynı sıra boyunca ilerler. Bu yüzden sadece mekaniklerin kısa bir incelemesine istenir. Değişim ve indeks operatörler polinom durumdayken şu şekilde tanımlanır ,

$$\begin{aligned}\hat{SV}(s_1, \dots, s_\infty) &= (SV_1(s_1), SV_2(s_1, s_2), \dots) \\ \hat{TV}(s_1, \dots, s_\infty) &= (TV_2(s_1, s_2), TV_3(s_1, s_2, s_3), \dots)\end{aligned}\quad (76)$$

Bu operatörler ve belirlenmiş Volterra sisteme göre , bir takım doğrusal boşluklar şu şekilde tanımlanır ,

$$\begin{aligned}U_1 &= \text{span} \{ \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty), S\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty), S^2\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty), \dots \} \\ U_2 &= \text{span} \{ TU_1, STU_1, S^2TU_1, \dots \} \\ U_3 &= \text{span} \{ TU_2, STU_2, S^2TU_2, \dots \} \\ &\vdots\end{aligned}\quad (77)$$

Ve , sonuç olarak ,

$$U = \text{span} \{ U_1, U_2, U_3, \dots \} \quad (78)$$

Açıktır ki , S ve T U 'dan U 'ya doğrusal operatörlerdir. Belirlenmiş sistemlere göre başlatma operatörü $L: R \rightarrow U$ şu şekilde ,

$$Lr = \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)r \quad (79)$$

ve değerlendirme operatörü $E: U \rightarrow R$ şu şekilde ,

$$E(V_1(s_1), V_2(s_1, s_2), \dots) = EV_1(s_1) \quad (80)$$

tanımlanır.

Bu ispat (S, T, L, E, U) şimdiye kadar standart hesaplamalardan takip edilen belirlenmiş Volterra sistem için bir soyut çift doğrusal gerçekleştirme sistemidir. Ayrıca , çift doğrusal gerçekleştirilebilirliğe ve en az sorulara bir cevap kolayca elde edilir. Eğer U sınırlı boyuta sahipse , o zaman belirlenmiş sistem çift doğrusal gerçekleştirilebilir olan yenisiyle değiştirme yapımı tarafından açıktır. Diğer taraftan , bir basit tez teorem 4.10'un ispatında gösterilen ona benzer bir Φ operatörden yararlanılır , eğer belirlenmiş sistem çift doğrusal gerçekleştirilebilirse o zaman U sınırlı boyutludur. (Ve eğer öyleyse değişim gerçekleştirme sistem için en az çift doğrusal gerçekleştirilmez.) Böylece Volterra sistemin çift doğrusal gerçekleştirilebilirliği doğrusal boşluk U 'un sınırlı boyutuna eşdeğerdir. Daha fazla doğu nitelendirme için araştırma teorem 4.9'un yönünde başlar.

Teorem 4.11: Eğer (74)'de $\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)$ tarafından belirlenmiş Volterra sistemi çift doğrusal gerçekleştirilebilirse , o zaman her düzenli transfer fonksiyonu $H_{reg}(s_1, \dots, s_k)$ kesinlikle uygun tanımlanabilir fonksiyondur.

Teorem 4.11'in ispatı $\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)$ 'nın çift doğrusal gerçekleştirilmesini almadan daha fazla hiçbir şey oluşmaz ve her $H_{reg}(s_1, \dots, s_k)$ hesaplama tarafından gözlem kesinlikle uygun tanımlanabilir fonksiyondur. Bu inceleme , teorem 4.9'la birlikte , ayrıca aşağıdaki ilginç bilgi üretilir.

Sonuç 4.1: Eğer Volterra sistem çift doğrusal gerçekleştirilebilirse , o zaman herhangi bir polinom sistem Volterra sistem ucunu kesme tarafından şekillenir ayrıca çift doğrusal gerçekleştirilebilir.

Maalesef , Volterra sistemler için çift doğrusal gerçekleştirilimin daha fazla direkt belirlenmesini arama teorem 4.11'in tersinin başarısızlıkla sonuçlandığı gösterir.

Örnek 4.5: Volterra sistemi hesapla

$$\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) = \left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{1/2!}{(s_1+1)(s_2+1)}, \dots, \frac{1/n!}{(s_1+1) \cdots (s_n+1)}, \dots \right)$$

İndeks operatör defalarca $j = 1, 2, \dots$ için uygulama verir ,

$$T^j \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) = \left(\frac{1/(j+1)!}{s_1+1}, \frac{1/(j+2)!}{(s_1+1)(s_2+1)}, \dots, \frac{1/(n+j+1)!}{(s_1+1) \cdots (s_n+1)}, \dots \right)$$

Alt sistemin numaraları beklenen yönde davranan tüm fonksiyonları aktarır. Ama numaraları koleksiyonundan beri

$$\left(\frac{1}{(j+1)!}, \frac{1}{(j+2)!}, \dots, \frac{1}{(j+n+1)!}, \dots \right), \quad j = 0, 1, \dots$$

sonsuz ebatlıdır , değişim operatörün hareketi düzgün hesaplama olmadan açıktır , $U = \text{span} \{U_1, U_2, \dots\}$ sonsuz ebatlı olacak. Böylece $\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)$ çift doğrusal gerçekleştiremez.

Farz edelim Volterra sistem her alt sistem düzenli transfer fonksiyonu , kesinlikle uygun ve tanınabilir olarak belirlenmiştir. Çift doğrusal gerçekleştirilebilirliği kontrol etmek için , örnek 4.7 seçim olmadığını gösterir , ama U 'nun boyutunun hesaplaması boyunca çalışır. Tabii , düzenli transfer fonksiyonların dizisi için genel şekle sahip problem ortaya çıkarır. Genel şekil gibi elde edildiğinde , çift doğrusal gerçekleştirmenin hesaplaması boyutlar küçükse kolay olabilir.

Örnek.4.6: Volterra sistem için

$$\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) = \left(\frac{1}{s_1+1}, \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}, \dots, \frac{1}{(s_1+1) \cdots (s_n+1)}, \dots \right)$$

Hızlı hesaplama gösterilir , bu

$$S^j \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) = (-1)^j \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty), \quad j = 1, 2, \dots$$

ve

$$T^j \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) = \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty), \quad j = 1, 2, \dots$$

Bundan dolayı boyut $U = 1$, ve başka kolay hesaplama gösterilir bu , en az çift doğrusal gerçekleştirme şöyledir

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t)u(t) + u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Resimle göstermeye ek olarak bir bakıma en kolay mümkün Volterra sistemi gerçekleştirme problemi , örnek 4.5 'le birlikte alt sistem profirtlerin karşılıklı bağımlılığını gösteren bu örnek sınırlı ebatlı gerçekleştirildiğinde önemli rol oynar. Diğer deyişle , çift doğrusal gerçekleştiribilirlik Volterra sistemde düzenli transfer fonksiyonların numaralarında sadece değişim sayıları tarafından yaratılan ya da imha edilen olabilir. Diğer ilginç inceleme örnek 4.6'da sistemin iki dereceli polinom budamaya karşı yapılabilir , yani ,

$$\hat{H}(s_1, s_2) = (\frac{1}{s_1+1} , \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} , 0, \dots)$$

Bu polinom sistem için en az çift doğrusal gerçekleştirme boyutu iki boyuta sahiptir. Böylece budama en az çift doğrusal gerçekleştirimin boyutu artabilir.

Belki belirlenmiş Volterra sistemin çift doğrusal gerçekleştiribilirliği için durumun temizleyici anlatımı (ya da , bu konu için , polinom ya da homojen sistem) değişim gerçekleştirme bakış açısından gelişebilir. Yaklaşım aşamayla negatif güç serilerinin yerini içerir bundan dolayı U bu ilerlemelerin sisteme düzenlemesi ilerlemenin doğrusal uzayı gibi görülür , ve sonra matrisin ilerlemelerini not alma U 'nun sınırlı boyutluluğa eşdeğerdir. Ayrıca , o doğrusal duruma pek çok benzer şekildir.

Düzenli transfer fonksiyonların $\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty)$ sırasını gösterme negatif güç serilerin sırasına benzer

$$\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) = (\sum_{i_1=0}^{\infty} h_{i_1} s_1^{-(i_1+1)} , \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{i_1 i_2} s_1^{-(i_1+1)} s_2^{-(i_2+1)} , \dots) \quad (81)$$

ve şeklin anlatımı

$$S^{j_k} T S^{j_{k-1}} T \dots T S^{j_1} \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) \quad (82)$$

aynı yolda görülebilir. Örneğin ,

$$\begin{aligned} S\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) &= (\sum_{i_1=0}^{\infty} h_{i_1+1} s_1^{-(i_1+1)} , \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{i_1+1, i_2} s_1^{-(i_1+1)} s_2^{-(i_2+1)} , \dots) \\ T\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) &= (\sum_{i_1=0}^{\infty} h_{0i_1} s_1^{-(i_1+1)} , \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{0i_1 i_2} s_1^{-(i_1+1)} s_2^{-(i_2+1)} , \dots) \end{aligned} \quad (83)$$

Negatif güç serilerinin ilerlemelerinden her biri ilerlemelerin dizisi gibi görülebilir. Örneğin ,

$$\begin{aligned} \hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) &= ((h_0, h_1, h_2, \dots), (h_{00}, h_{01}, h_{02}, \dots, h_{10}, h_{11}, h_{12}, \dots), \dots) \\ S\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) &= ((h_1, h_2, h_3, \dots), (h_{10}, h_{11}, h_{12}, \dots, h_{20}, h_{21}, h_{22}, \dots), \dots) \\ T\hat{H}(s_1, \dots, s_\infty) &= ((h_{00}, h_{01}, h_{02}, \dots), (h_{000}, h_{001}, h_{002}, \dots, h_{010}, h_{011}, h_{012}, \dots), \dots) \end{aligned}$$

Tabii , çok indeksli ilerlemeler sistematik olarak bir çok yola sahiptirler , ama özel düzenleme hepsi aynı yolda listelendiği sürece önemsizdir.

Bu bakış açısından , (77)'de her U_j ve (78)'de her U ilerlemelerin doğrusal uzayı gibi dikkate alınmalı. Değişim ve indeks operatörleri üstteki gibi açıklanır , ve L ve E

operatörler dizi açıklaması için benzer şekilde değiştirilmiştir. Daha sonra belirlenmiş sistem için bir davranış matrisi dizi yorumu açısından şu şekilde tanımlanır ,

$$\begin{aligned}
 B_{\hat{H}} &= \begin{bmatrix} \hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ S\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ S^2\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ \vdots \\ T\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ ST\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ S^2T\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ \vdots \\ S^{j_k}T \cdots TS^{j_1}\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty}) \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{00} & h_{01} & \cdots \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{10} & h_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{000} & h_{001} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (84)
 \end{aligned}$$

Ve şimdi aşağıdaki gerçekleştirilebilir durum doğrusal boşluk U üstünde sınırlı boyutsal durumun apaçık yeniden ifadesi olmalı.

Teorem 4.12: $\hat{H}(s_1, \dots, s_{\infty})$ tarafından tanımlanan Volterra sistem ancak ve ancak uygunsa çift doğrusal gerçekleştirilebilir. Davranış matrisi $B_{\hat{H}}$ sınırlı sıraya sahip. Bunu yanında , çift doğrusal gerçekleştirilebilir sistem için , $B_{\hat{H}}$ 'nin sırası en az çift doğrusal gerçekleştirilmenin boyutudur.

4.4 Çift Doğrusal Durum Denklemlerin Özellikleri

Çift doğrusal gerçekleştirme sorusunda doğrudan dikkate sahip olma , böyle durum eşitlemenin ayırıcı özelliğinin bazıları tartışmaya uygundur. Önceden bahsedilmiş gibi , çift doğrusal durum eşitlemeleri bir çok yapısal karaktere sahiptir , bu doğrusal durum eşitlemelerin iyi bilinen karakterlerine dikkat çekici şekilde benzerdir. Bu özellikler çift doğrusal durum eşitlik temsilleri olan Volterra sistemin genel durumunda ispat edilecek. Homojenik ya da polinom sistemin özel durumların ayrı olarak dikkate alınmasına gerek yok.

Sık sık karşılaşılan bir soru belirlenmiş çift doğrusal eşitliğin en az olup olmadığıdır. Diğer bir deyişle , durum denklemin girdi-çıkışı tanımlamanın en az çift doğrusal gerçekleştirilebilir olup olmadığıdır. Bu soruya uygun yol uygun fikirler boyunca ulaşılabilir ve gözlenebilir. Bu fikirler en aza geliştirilecek ve bağlanacak. Aynı zamanda , en az çift doğrusal gerçekleştirilmelerin kesin denklik özellikleri ele alınacak.

Çift doğrusal durum denklemi için ulaşılabilirliğin uygun tanımı

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t)u(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0\end{aligned}\tag{85}$$

ulaşılabilir durumun kavramıyla başlar. Her zaman olduğu gibi , $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(t)$ ve $y(t)$ sayısallardır.

Tanım 4.1: Çift doğrusal durum denkleminin (85) x_1 durumu parça parça sürekli giriş sinyali varsa öyle ki bazı $t_1 < \infty$, $x(t_1) = x_1$ için *ulaşılabilir* ($x(0) = 0$ 'den) adlandırılır.

Aşağı yukarı uygunluk sorunu olan giriş sinyali için parça parça sürekliliğin özelliğini not almalı. Girişlerin daha çok genel ve kısıtlayıcı sınıfları sabitken sonuçlar seçilmiş olmalı. (Ama kabul edilebilir girdilerin açıkça belirtilen sınıfı değil zayıf tatta olacaktı.)

Çift doğrusal denklemi için ulaşılabilir durumların seti , durum boşluk $\mathbb{R}^m$ 'nin doğrusal alt uzayı şekli verilmesi hoş olurdu. Maalesef bu durum değil ; ulaşılabilir durumların doğrusal bileşenleri ulaşılabilir olmamalı. Bu yüzden , doğrusal cebirin teknikleri için uygulanabilen ulaşılabilirliğin biraz daha güçsüz kavramı kullanılır.

Tanım 4.2: Çift doğrusal durum denklemi $(A, D, b, c, \mathbb{R}^m)$, ulaşılabilir durumların sürelerinin $\mathbb{R}^m$ setine rağmen *süre ulaşılabilir* olarak adlandırılır.

Belirlenmiş sistemin süre uygulanabilirliği için bir kriterin ilk adımı , ulaşılabilir durumların karakter süresidir. Son olarak , $\tilde{L}_{A,D}(b)$ izin vermek $\mathbb{R}^m$ 'nin en az boyut alt uzayı belirtmek b ve değişmez A ve D 'nin altını kapsar.

Yardımcı teorem 4.1: $(A, D, b, c, \mathbb{R}^m)$ 'nin ulaşılabilir durumları tarafından sürelenen alt uzay $X_{sr} \subset \mathbb{R}^m$, $X_{sr} = L_{A,D}(b)$ tarafından belirlenmiştir.

İspat bazı girdi $u(t)$ ve bazı $t_1 < \infty$, $x(t_1) = x_1$ için , x_1 ulaşılabilir durumdur. Sonra x_1 çift doğrusal durum denklemin çözümleri $x(t)$ için bölüm 3'te türetilmiş ifade kullanma yazılabilir. $x(0) = 0$ 'nın durumu ve sabit kat sayı matrisleri için , ilk birkaç şartlar

$$\begin{aligned}x_1 &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\sigma)} bu(\sigma) d\sigma \\ &+ \int_0^{t_1} \int_0^{\sigma_1} e^{A(t_1-\sigma_1)} D e^{A(\sigma_1-\sigma_2)} bu(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots\end{aligned}\tag{86}$$

Bu ifade $x_1 \in L_{A,D}(b)$ için , A ve D çarpı b 'nin ürünlerinin doğrusal bileşimin gösterir. Bu sonuçla $X_{sr} \subset L_{A,D}(b)$ 'den beri ulaşılabilir durumların seti X_{sr} için bu temel şekiller vardır.

Ters kapsamayı elde etme , bütün $t \geq 0$ için $x(t)$ kapsanan alt uzaysa gösteri zor değildir. Böylece , herhangi bir sabit girdi $u(t) = u$, ve herhangi bir ulaşılabilir durum x_1 için,

$$(A + Du)x_1 + bu \in X_{sr}$$

Özellikle , $x_1 = 0$ ulaşılabilir , ve bu yüzden $b \in X_{sr}$. Bundan dolayı , eğer u herhangi bir reel sayıysa , ve x_1 herhangi bir ulaşılabilir durumsa ,

$$(A + Du)x_1 \in X_{sr}$$

Sonra ulaşılabilir durumların bu sürelerinin seti X_{sr} , $(A + Du)$ altında X_{sr} 'nin herhangi bir u görüntüsü içindir.

$$(A + Du)X_{sr} \subset X_{sr}$$

Bu ima etmeleri göstermek için soru 4.14 'e bakılır , bu X_{sr} her iki A ve D 'nin altında sabittir. Sonra X_{sr} b 'yi içerir ve A ve D , $L_{A,D}(b) \subset X_{sr}$ 'nin altında sabittir. Bu tamamlamaların ispatı ,

' $L_{A,D}(b)$ 'nin bir nitelendirmesi tekrarlanarak tanımlayan tarafından elde edilebilir.

$$p_1 = b, p_i = [Ap_{i-1} \ Dp_{i-1}], \quad i = 2, 3, \dots \quad (88)$$

Ve müsaade eder.

$$P_i = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i] \quad (89)$$

Yardımcı teorem 4.2: ' $L_{A,D}(b)$ ve $R[P_m]$ doğrusal alt uzaylar özdeşdir.

İspat doğrusal alt uzay $R[P_k]$, P_k 'nin kolonları tarafından alt uzay sürelidir. P_k 'nin kolonları bu P_{k-1} 'i kapsar , ve ekstra kolonlar A ve D tarafından çarpılarak üretilir. Bu yüzden ,

$$R[P_1] \subset R[P_2] \subset \dots \subset R^m$$

Özellikle , bir $k-1 \leq m$ vardır , öyle ki,

$$R[P_1] \subset R[P_2] \subset \dots \subset R[P_{k-1}] = R[P_k] = \dots = R[P_m] \subset R^m$$

ve bu yüzden $R[P_{k-1}] = R[P_m]$ A ve D ve b kapsamaların altında sabittir. O gösterir ki $R[P_m]$ alt uzay gibi en az boyuttur. Bundan dolayı farz edelim $X \subset R^m$ b 'yi içeren ve A ve D 'nin altında değişmeyen herhangi bir alt uzaydır. Ama X , $X \subset R[P_m]$ olan $b, Ab, Db, \dots$ 'i içermeli. Sonuç olarak $R[P_m]$ en az boyuttur.

Bu sonuç süre uygulanabilirliği için ölçüte direkt olarak yol açar çünkü *rütbe* P_m , $R[P_m]$ 'nin kesinlikle boyutudur.

Teorem 4.13: m -ebatlı çift doğrusal durum denklemi (85) ancak ve ancak *rütbe* $P_m = m$ 'yse süre ulaşılabilir.

Şimdi çift doğrusal durum denklemleri için bir uygun gözlenebilirlik özelliği geliştirmenin problemine dönerim. Tekrar , kullanılan kavram doğrusal durum denklemleri için gözlenebilirlik olan biraz güçsüz biçimde tanımlanacak.

Tanım 4.3: Çift doğrusal durum denklemin (85) $x_0 \neq 0$ durumu *seçilemez* (0'dan) olarak adlandırılır eğer $x(0) = x_0$ ile cevap $y(t)$ her parça parça sürekli giriş sinyali için $x(0) = 0$ ile cevaba özdeşse.

Burada , önceden olduğu gibi , parça parça devamlılık sadece kesinlik için belirlenmiştir. Uyarı , bu tanım cevap $y(t)$ 'nin bilgiden görülebilir başlangıç durumu hesaplama kabiliyeti hakkında hiçbir şey ima etmez. Bu konu tartışma altında yapı kuramla ilgili olmadığı için dikkate alınacak.

Tanım 4.4: Çift doğrusal durum denklemi (85) *gözlenebilir* olarak adlandırılır eğer seçilemez durumlar yoksa.

Çift doğrusal durum denklemi (A, D, b, c, R^m) için gözlenebilirliğin kavramını nitelendirmek , A ve D 'nin altında sabit olan en geniş alt uzay kapsanan $N[c]$, $G_{A,D}(c) \subset R^m$ izin vermesi uygundur.

Yardımcı teorem 4.3: (A, D, b, c, R^m) 'in bütün seçilemez durumların alt kümesi $X_i = G_{A,D}(c)$ tarafından belirlenmiş olan doğrusal alt uzaydır.

İspat (taslak) bölüm 3'te türetilmiş gösterimi kullanma , gelişigüzel başlangıç durumu x_0 ve girdi $u(t)$ 'a çift doğrusal sistemin cevabı seriler gibi yazılabilir , ilk birkaç şartlar ;

$$y(t) = ce^{At}x_0 + \int_0^t ce^{A(t-\sigma)}De^{A\sigma}x_0u(\sigma) d\sigma + \int_0^t ce^{A(t-\sigma)}bu(\sigma) d\sigma + \dots$$

Büyüyen matris ülselerleri şekilden şartlar sağlar

$$\begin{aligned} y(t) = & cx_0 + cAx_0t + cDx_0 \int_0^t u(\sigma) d\sigma \\ & + cb \int_0^t u(\sigma) d\sigma + cAb \int_0^t (t-\sigma)u(\sigma) d\sigma + \dots \end{aligned} \quad (90)$$

Seçilemez durumlar şekiller bir doğrusal alt uzayın seti olan bu anlatımdan açık olmalı. Ayrıca eğer $x_0 \in G_{A,D}(c)$ görülmesi kolaysa , o zaman x_0 seçilemez. Diğer deyişle, $G_{A,D}(c) \subset X_i$. Ters kapsama bütün reel sayılar u için gösterildiğinden elde edilendir ,

$$(A + Du)X_i \subset X_i$$

ve bu

$$X_i \subset N[c]$$

Detaylar tamamlamada güçtür , ve böylece çıkarılır.

Şimdi X_i tanımlama $G_{A,D}(c)$ tanımlamayı içerir.

$$q_1 = c, \quad q_i = \begin{bmatrix} q_{i-1}A \\ q_{i-1}D \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (91)$$

ve

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (92)$$

Sonra aşağıdaki sonuç yardımcı teorem 4.2 'ye benzer tarzda ispatlanmıştır.

Yardımcı teorem 4.4: Doğrusal alt uzaylar X_i ve $N[Q_m]$ özdeşir.

Şimdi doğrusal cebirin açık uygulaması bir gözlenebilirlik kriteri verir.

Teorem 4.14: m -ebatlı çift doğrusal durum denklemi (85) ancak ve ancak *rütbe* $Q_m = m$ ise gözlenebilir.

Bu kavramlar kendileriyle ilgilendiğinde , burada ki amaç en az çift doğrusal gerçekleştirmelerin teoriyle birlikte onları kullanmak içindir. Sonuçta çok önemli olan P_i ve Q_i matrisleri hakkında daha fazla olgu vardır.

Yardımcı teorem 4.5: Herhangi bir $j, k = 1, 2, \dots$, ürün $Q_j P_k$ için belirlenmiş sistemin bütün çift doğrusal gerçekleştirmeleri aynıdır.

İspat varsayalım (A, D, b, c, R^m) ve $(\hat{A}, \hat{D}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{R}^m)$ ikisi de belirlenmiş sistemin çift doğrusal gerçekleştirmeleridir. Sonra iki sistemin düzenli çekirdekleri $n = 1, 2, \dots$, için bütün $\sigma_1, \dots, \sigma_n \geq 0$ için aşağıdakini verir.

$$ce^{A\sigma_n} De^{A\sigma_{n-1}} D \dots De^{A\sigma_1} b = \hat{c} e^{\hat{A}\sigma_n} \hat{D} e^{\hat{A}\sigma_{n-1}} \hat{D} \dots \hat{D} e^{\hat{A}\sigma_1} \hat{b}$$

Onun güç serilerinin genişlemesi tarafından her matris üssel yerine koyma ve benzer tezlerin katsayılarını eşitleme her $n = 1, 2, \dots$ ve her $i_j \geq 0$ için şunu gösterir.

$$cA^{i_n} D \dots DA^{i_1} b = \hat{c} \hat{A}^{i_n} \hat{D} \dots \hat{D} \hat{A}^{i_1} \hat{b}$$

Bu tam ispattan sonra ürün $Q_j P_k$ 'in her elementi kesinlikle bu şekle sahiptir.

Bu noktada , hemen hemen bütün araçlar çift doğrusal gerçekleştirmeler için gerek duyulan en az karaktere yakındır. Bir kalıcı hesaplama gösteri içerir eğer (A, D, b, c, R^m) belirlenmiş sistem için bir gerçekleştirmeyse o zaman herhangi bir tersine çevrilebilir , $m \times m$ matris $T, (TAT^{-1}, TDT^{-1}, Tb, cT^{-1}, R^m)$ de sistem için gerçekleştirmedir. Bu bir kolay alıştırmaya gibi bırakılır.

Teorem 4.15: Belirlenmiş Volterra sistemin çift doğrusal gerçekleştirilmesi ancak ve ancak süre ulaşılabilir ve gözlenebilirse en azdır.

İspat (85) varsay belirlenmiş Volterra sistem için boyut m 'in çift doğrusal gerçekleştirilmesidir, ama bu süre ulaşamaz. Boyut $< m$ 'in başka çift doğrusal gerçekleştirme yapımı nasıl göstereceğim. Sonra (A, D, b, c, R^m) süre ulaşamaz, $R[P_m] \subset R^m$ ve $R^m = R[P_m] \oplus V$ yazabilirim, $\oplus$ doğrudan toplamı gösterir, ve V en azından boyut 1'in doğrusal alt uzayıdır. R^m için temel seçim, $R[P_m]$ için temel $w_1, \dots, w_r$ ve V için temel $w_{r+1}, \dots, w_m$ 'in birleştirmesidir. T^{-1} 'e izin vermek kolon w_i ile i^{th} $m \times m$ matrisi olur, sonra da $(TAT^{-1}, TDT^{-1}, Tb, cT^{-1}, R^m)$ belirlenmiş Volterra sistemin m -ebatlı çift doğrusal gerçekleştirilmesidir. Bundan başka, $R[P_m]$ için b 'i kapsar, ve A ve D 'in altında sabittir, bu yeni gerçekleştirilmenin kısımlara ayırmada ki şekli

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad TDT^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$Tb = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad cT^{-1} = [c_1 \quad c_2] \quad (93)$$

TAT^{-1} ve TDT^{-1} de 0 blokları $(m-r) \times r$ dir, Tb de 0 bloğu $(m-r) \times 1$ dir, ve c_1 $r \times 1$ dir. Şimdi $n = 1, 2, \dots$ ve $\sigma_1, \dots, \sigma_n \geq 0$ için gösterilen kolay hesaplama şudur

$$ce^{A\sigma_n} De^{A\sigma_{n-1}} D \dots De^{A\sigma_1} b = c_1 e^{A_{11}\sigma_n} D_{11} e^{A_{11}\sigma_{n-1}} D_{11} \dots De^{A_{11}\sigma_1} b_1$$

Böylece $(A_{11}, D_{11}, b_1, c_1, R^r)$ boyut $r < m$ 'in çift doğrusal gerçekleştirilmesidir. Çok benzer bir biçimde gösterilebilir eğer çift doğrusal gerçekleştirme gözlenebilir değilse, o zaman en az değildir.

Şimdi (A, D, b, c, R^m) ve $(\hat{A}, \hat{D}, \hat{b}, \hat{c}, R^{\hat{m}})$ belirlenmiş sisteme göre, sırasıyla, boyut m ve $\hat{m}$ 'in çift doğrusal gerçekleştirmeleri süre-ulaşılabilir ve gözlenebilir. $M = \max[m, \hat{m}]$ 'e izin vermek, yardımcı teorem 4.4 'ü verir

$$Q_M P_M = \hat{Q}_M \hat{P}_M \quad (94)$$

Ama P_M 'in m sıraları ve Q_M 'in m kolonları doğrusal bağımsızdır, ve $\hat{P}_M$ 'in $\hat{m}$ sıraları ve $\hat{Q}_M$ 'in $\hat{m}$ kolonları doğrusal bağımsızdır. Böylece, (94) $m = \hat{m}$ anlamına gelenler okuyucuya detaylar bırakır. Bütün bunlar, belirlenmiş Volterra sistemin süre-ulaşılabilir ve gözlenebilir gerçekleştirmeleri aynı boyuta sahiptir. İspatın ilk bölümünde gözlenen en az çift doğrusal gerçekleştirme süre-ulaşılabilir ve gözlenebilir. Böylece belirlenmiş Volterra sistemin bütün süre-ulaşılabilir ve gözlenebilir gerçekleştirmeler en azdır.

En az çift doğrusal gerçekleştirilmenin nitelendirmesinde son adım belirlenmiş Volterra sistemin böyle bütün gerçekleştirmeleri değişkenin değişimi tarafından bağlantılı olarak gösterilecek.

Teorem 4.16: (A, D, b, c, R^m) belirlenmiş sistemin en az çift doğrusal gerçekleştirmesidir. Sonra $(\hat{A}, \hat{D}, \hat{b}, \hat{c}, R^m)$ de ancak ve ancak ters çevrilmiş matris T öyle ki $A = T\hat{A}T^{-1}, D = T\hat{D}T^{-1}, b = T\hat{b}, c = \hat{c}T^{-1}$ varsa belirlenmiş sistemin en az çift doğrusal gerçekleştirmesidir.

İspat eğer böyle T varsa , o zaman yeterli miktar öneriyi daha erken kolay alıştırmadan izler. Zorunluluk için , her iki durum denklemleri de belirlenmiş sistemin en az çift doğrusal gerçekleştirmeleridir. Sonra yardımcı teorem 4.4 tarafından ,

$$Q_k P_j = \hat{Q}_k \hat{P}_j, \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (95)$$

ve , bütün teorem 4.15 , $Q_m, \hat{Q}_m, P_m,$ ve $\hat{P}_m$ tarafından rütbe m 'ye sahiptir. Özellikle , $(Q_m' Q_m)$ olan bu ima etmeler ters çevrilmiştir , bu yüzden eğer

$$T = (Q_m' Q_m)^{-1} Q_m' \hat{Q}_m \quad \text{ise}$$

o zaman

$$Q_m' Q_m T = Q_m' \hat{Q}_m$$

ve

$$Q_m' Q_m T \hat{P}_m P_m' = Q_m' \hat{Q}_m \hat{P}_m P_m' = Q_m' Q_m P_m P_m'$$

Ondan sonra $P_m P_m'$ ters çevrilmiş olabilir , bu ters çevrilmiş olan T 'yi verir , ve

$$T^{-1} = \hat{P}_m P_m' (P_m P_m')^{-1}$$

Şimdi (95) de $k = 1, j = m$ ile $c P_m = \hat{c} \hat{P}_m$ 'i ima eder , buda $b = T \hat{b}$ 'i verir. $A P_m$ 'in kolonlarını not almak P_{m+1} 'in kolonlarını kapsar , ve $D P_m$ 'in kolonları P_{m+1} 'in kolonlarını kapsar. Böylece (95)'deki ima etmeler

$$Q_m A P_m = \hat{Q}_m \hat{A} \hat{P}_m, \quad Q_m D P_m = \hat{Q}_m \hat{D} \hat{P}_m$$

Örneğin , bu denklemlerin ilkinin alma ,

$$Q_m' Q_m A P_m P_m' = Q_m' \hat{Q}_m \hat{A} \hat{P}_m P_m'$$

ya da

$$A = (Q_m' Q_m)^{-1} Q_m' \hat{Q}_m \hat{A} \hat{P}_m P_m' (P_m P_m')^{-1} = T \hat{A} T^{-1}$$

İkinci eşitliğin benzer hesaplaması ispatı tamamlar.

4.5 Sabit Olmayan Durum

Dönüşüm-bölge araçlar önceki bölümlerde çok geniş ölçüde kullanıma sahipti ama sabit olmayan durumlarda başarılı biçimde kullanılamadı. Ayrıca , düzenli çekirdek sabit sistemler için sadece geliştirilmektedir. Bu yüzden sabit olmayan sistemlerin girdi-çıkı gösteriminde ya üç köşeli ya da simetrik çekirdekleri kullanmanın seçimi ayrılır. Sonra çift doğrusal gerçekleştirmeler ilginçtir , bölüm 3'te üç köşeli çekirdek gelişti çünkü bu şekilde durum denklemleri kullanılacak , sonuçlara rağmen simetrik çekirdeklere göre kolayca tekrar ifade edilebilir.

Sabit olmayan çift doğrusal durum denklemi şu şekli alır

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + D(t)x(t)u(t) + b(t)u(t) \\ y(t) &= c(t)x(t)\end{aligned}\quad (96)$$

bütün boyutlarda alışıldığı gibidir , ve katsayı matrisleri t 'in varsayılan sürekli fonksiyonları olmaya önemsizcedir. Bölüm 3'te $x(0) = 0$ ile böyle durum denklemi Volterra sistem gösterimi sağladığını gösterir

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{n-1}} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_1 \quad (97)$$

üç köşeli çekirdek olan n^{th} şu şekilde verilir

$$\begin{aligned}h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) &= c(t)\Phi(t, \sigma_1)D(\sigma_1)\Phi(\sigma_1, \sigma_2)D(\sigma_2)\Phi(\sigma_2, \sigma_3) \\ &\cdots D(\sigma_{n-1})\Phi(\sigma_{n-1}, \sigma_n)b(\sigma_n)\end{aligned}\quad (98)$$

ve $\Phi(t, \sigma)$ olan $A(t)$ için geniş matristir.

Şekil (97)'nin genel Volterra sistemi için çift doğrusal gerçekleştirme problemini hesaba katmak zor iştir. Bunlar hakkında şimdi söylenebilir ki Volterra sistem çift doğrusal gerçekleştirebilir ancak ve ancak eğer uygun bir şekilde boyutlu , sürekli matris fonksiyonları $A(t)$, $D(t)$, $b(t)$, ve $c(t)$ öyle ki çekirdekler şekil (98)'de yazılabilir ; daha doğrusu söyleyişmiş gibi çift doğrusal gerçekleştirebilir ancak ve ancak çift doğrusal gerçekleştirebilir. Zorluk sabit durumda meydana çıkan zorluklara doğada benzerdir. Volterra sistemin çift doğrusal gerçekleştirebilirliği kişisel çekirdeklerin özelliğine ve çekirdeklerin karşılıklı bağlantı yoluna bağlıdır. Ancak görünüş türdeş ve polinom sistemler için daha parlaktır , ve bu durumlarda yoğunlaşacağım.

Teorem 4.17: n -dereceli türdeş sistem şöyle tanımlanır

$$y(t) = \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{n-1}} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_1 \quad (99)$$

çift doğrusal gerçekleştirebilir ancak ve ancak çekirdek $h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ayrılabilirse.

İspat eğer sistem çift doğrusal gerçekleştirebilirse , o zaman çekirdek şekil (98)'de yazılabilir. Geçiş matrisin özellikleri nedeniyle , bu yüzden çekirdek ayrılabilir.(Doğrusal

durumdaki gibi , süreklilik çift doğrusal durum denkleminde sürekli tahminler tarafından döşenmiş olması gerekli.)

Şimdi bu varsayımda çekirdek ayrılabilir ,

$$h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^m v_{0i}(t) v_{1i}(\sigma_1) \cdots v_{mi}(\sigma_n)$$

Durum $m = 1$ için , çift doğrusal durum denklemin gösterisi açıktır ki

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & v_{1m}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_{2m}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_{n-1,m}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{nm}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [v_{0m}(t) \ 0 \ \cdots \ 0] x(t)$$

çekirdekle n –dereceli türdeş bir sistemdir

$$h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = v_{0m}(t) v_{1m}(\sigma_1) \cdots v_{nm}(\sigma_n)$$

İspat genel durumda kullanılabilen bu basit çift doğrusal durum denklemlerin bir katkısız paralel bağlantısından sonra şimdi hemen hemen tamdır. İspatın sebebi tam değildir $m = 1$ olduğunda $v_{ji}(\cdot)$ reel fonksiyonlar olmalı , ama $m > 1$ için onlar karmaşık olmalı. Bu detayları göz önünde tutma okuyucuya bırakılır.

Ayrıca bu türdeş sistemleri nitelendirmek ilgi çekicidir , sabit olmayan üçgensel çekirdeklere göre temsil edildiği halde , gerçekten sabit-parametre çift doğrusal durum denklemleri tarafından gerçekleştirilebilir. Bir daha , sonuçlar doğrusal-sistem sonuçlara bezelerdir.

Teorem 4.18: Şekil (99)'un n -dereceli türdeş sistemi sabit-parametre çift doğrusal durum denklemleri tarafından gerçekleştirilebilir ancak ve ancak çekirdek $h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sabit ve farklı olarak ayrılabilirse.

İspat eğer n -dereceli türdeş sistem bir sabit-parametre çift doğrusal gerçekleştirilmeye sahipse , o zaman sabitsel ve diferansiyelleşebilir ayrılmış olabilenler çekirdeğin bilinen genel şeklinden kolaylıkla takip edilir.

Şimdi varsayalım üç köşeli çekirdek sabit ve diferansiyelleşebilir ayrılabilir. Basitliğe göre her $v_j(\cdot)$ reel fonksiyon olan özel durumu hesaplayacağım

$$h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = v_0(t) v_1(\sigma_1) \cdots v_n(\sigma_n)$$

(Doğrusal durum gibi , ispatın genellemesi karmaşık-değerli fonksiyonlar gereken hariç kolaydır. Sonra daha fazla telaşlı tartışmalar reel-katsayı gerçekleştirme elde edilebilen gösteriye gereklidir.) İspatın ana bölümü $c_1, a_1, \dots, a_n$ reel numaralar için şekilde yazılabilen çekirdeğin göstermeye adayacaktır.

$$h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = c_1 e^{a_1(t-\sigma_1)} e^{a_2(\sigma_1-\sigma_2)} \dots e^{a_n(\sigma_{n-1}-\sigma_n)}$$

Buda kurulmuştur , çift doğrusal gerçekleştirme alışlagelmiş hesaplama tarafından isteyerek doğrulanmış olduğu gibi şu şekilde belirlenmiştir.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t)u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [c_1 \ 0 \ \dots \ 0] x(t)$$

Temel yaklaşım ilk önerinin sabit-katsayı doğrusal diferansiyel denklemi tahmin eden her $v_j(\cdot)$ 'in ispatlamasını içerir. Buna göre göster , söyle , $v_1(\sigma_1)$, izin ver

$$q_1 = \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T v_0^2(t) v_2^2(\sigma_2) \dots v_n^2(\sigma_n) dt d\sigma_2 \dots d\sigma_n$$

$T \ q_1 > 0$ için seçilir. Eğer T nin böyle olmadığını not alırsak , o zaman çekirdek bir önemsiz durum aynıdır. Şu şekildedir

$$h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = h(0, \sigma_1 - t, \dots, \sigma_n - t)$$

çünkü

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma_k} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) + \frac{\partial}{\partial t} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$$

Ayrılabilir şekil kullanarak türevler hesaplama şunu verir

$$v_0(t) \dot{v}_1(\sigma_1) v_2(\sigma_2) \dots v_n(\sigma_n) + v_0(t) v_1(\sigma_1) \dot{v}_2(\sigma_2) v_3(\sigma_3) \dots v_n(\sigma_n) \\ + \dots + v_0(t) v_1(\sigma_1) \dots v_{n-1}(\sigma_{n-1}) \dot{v}_n(\sigma_n) + \dot{v}_0(t) v_1(\sigma_1) \dots v_n(\sigma_n) = 0$$

$v_0(t) v_2(\sigma_2) \dots v_n(\sigma_n)$ ve yeniden düzenleme tarafından bu denklemi çarpma şunu verir

$$[v_0^2(t) v_2^2(\sigma_2) \dots v_n^2(\sigma_n)] \dot{v}_1(\sigma_1) + [v_0^2(t) v_2(\sigma_2) \dot{v}_2(\sigma_2) v_3^2(\sigma_3) \dots v_n^2(\sigma_n) \\ + \dots + v_0^2(t) v_2^2(\sigma_2) \dots v_n(\sigma_n) \dot{v}_n(\sigma_n) + v_0(t) \dot{v}_0(t) v_2^2(\sigma_2) \dots v_n^2(\sigma_n)] v_1(\sigma_1) = 0$$

Bu anlatımın her iki yanı da r_1 'in açık tanımıyla elde etme $t, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 'e göre birleştirilebilir.

$$q_1 \dot{v}_1(\sigma_1) + r_1 v_1(\sigma_1) = 0$$

Böylece $v_1(\sigma_1)$ basit-parametre doğrusal diferansiyel denklem ($q_1 \neq 0$ için önemli) tahmin edilir. Bu yöntem uygun a_1 ve c_1 içindir. Bir benzer gelişme $j = 2, 3, \dots, n$ için $v_j(\sigma_j) = c_j e^{a_j \sigma_j}$ olan gösteriye gerçekleştirilir. Şimdi durum

$$v_0(t) = v_0(0) e^{-(a_1 + \dots + a_n)t}$$

veren

$$\begin{aligned} v_0(t) c_1 e^{a_1 \sigma_1} \dots c_n e^{a_n \sigma_n} &= v_0(0) c_1 e^{a_1(\sigma_1 - t)} \dots c_n e^{a_n(\sigma_n - t)} \\ &= v_0(0) e^{(a_1 + \dots + a_n)(-t)} c_1 e^{a_1 \sigma_1} \dots c_n e^{a_n \sigma_n} \end{aligned}$$

gibi yazılabilir. Böylece c_1 'in tekrar uygun tanımlama

$$\begin{aligned} h(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) &= c_1 e^{-(a_1 + \dots + a_n)t} e^{a_1 \sigma_1} \dots e^{a_n \sigma_n} \\ &= c_1 e^{-(a_1 + \dots + a_n)(t - \sigma_1)} e^{-(a_2 + \dots + a_n)(\sigma_1 - \sigma_2)} \dots e^{-a_n(\sigma_{n-1} - \sigma_n)} \end{aligned}$$

ve ispat tamdır.

Türdeş sistemler için bu sonuçlar direkt olarak polinom sistemler için çift doğrusal gerçekleştiribilirlik sonuçları sağlar. Bu , polinom sistem için çift doğrusal gerçekleştiribilirlik çift doğrusal gerçekleştiribilirliğin her birine ve her bir türdeş alt sisteme bağlıdır. Aşağıdaki biçimleştirmenin kolay ispatı bölüm 4.9'a bırakır , teorem 4.9'nin ispatını ip ucuyla elde edebilir.

Teorem 4.19: N -dereceli bir polinom sistem (sabit-parametre) çift doğrusal gerçekleştirmeye sahiptir ancak ve ancak N üç köşeli çekirdeklerin her biri ayarlanabilirse (sabit ve farklı olarak

4.6 Görüşler ve Kaynaklar

Görüş 4.1: Doğrusal gerçekleştirme probleminde materyalin bolluğu vardır ve sadece birkaç kaynaklar burada listelenecek. Sabit sistemler için bir basit inceleme , çok-girdi , çok-çıkı kapsayan durum , bulunmuş olabilir,

C. Chen , *Doğrusal Sistem Kuramına Giriş* , Holt , Rinehart ve Winston , New York , 1970.

Bir temel işlem olan vurgular Hankel (Behavior) matrisleri ve rasyonel fonksiyonların cebirsel özellikleriyle bağlantılar kitapta belirlenmiştir bu alçak gönüllülük beni hemen hemen anmanın önene geçer :

W. Rugh , *Doğrusal Sistemlerin Matematiksel Tanımı* , Marcel Dekker , New York , 1975.

Hankel sistem yaklaşımın daha çok araştırma-yönlü incelemesi , perspektifler ve açık problemlerin bir ilginç tartışmasıyla birlikte verilmiştir

R. Kalman , "Doğrusal Dinamik Sistemlerin Gerçekleştirme kuramı" , *Fonksiyonel Analizde Kontrol Kuramı ve Konuları* içinde , Cilt 2 , Uluslararası Atom Enerjisi Temsilcisi , Viyana , sf. 235-256 , 1976.

Bölüm 4.1 de kullanılan soyut değişim gerçekleştirme şu yaklaşımdan gelişmiştir

E. Gilbert , “Doğrusal Sistemler için Gerçekleştirme Algoritmaları ve Sınırlı Geri Kalmış Değişim Gerçekleştirmenin Rolü” , *Bilgi Bilimleri ve Sistemlerinde 1978 Konferansının Yöntemleri* , Elektrik Mühendisliği Bölümü , Johns Hopkins Üniversitesi , Baltimor , sf. 145-151 , 1978.

Son olarak , sabit olmayan doğrusal sistemler için gerçekleştirme problemi şunda ele alındı

L. Silverman , “Doğrusal Dinamik Sistemlerin Gerçekleştirmesi” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-16 , sf. 554-568 , 1971.

R. Brockett , *Sınırlı Ebatlı Doğrusal Sistemler* , John Wiley , New York , 1970.

Görüş 4.2: Doğrusal sistemlerin ve çarpanların birbirine bağlı olmalarına göre doğrusal olmayan gerçekleştirme problemin önceki işlemi şunda verilmiştir

M. Schetzen , “Doğrusal Olmayan Sistemlerin Bir Sınıfının Sentezi” , *İdarenin Uluslararası Dergisi* , Cilt 1 , sf 401-414 , 1965.

İki dereceli durumda , temel birbirine bağlı olma durumu doğrusal sistemin bir kas kat bağlaması aşağıdaki iki doğrusal sistemin çarpımsal paralel bağlantısıdır. Bu temel yapıların katkı maddesi paralel bağlantıları da kullanılır. Gerçekleşebilir testler ve gerçekleştirme yöntemleri aktarım işlevi için yapısal şekilde dayanan gelişmişliktir , $H_1(s_1)H_2(\bar{s}_2)H_3(s_1+s_2)$ birbirine bağlı olan sonuçlardan doğal olarak meydana çıkar. Transfer fonksiyonu için standart şekle göre gerçekleşebilirliğin konusu (simetrik transfer fonksiyonu demek) tartışılmaz.

Daha fazla gerçekleştirme fikirlerin gelişimi doğrusal sistemler ve çarpanların az çok birbirine bağlı olma özelliğın simetrik transfer fonksiyonların yapısal özelliklerine dayanma aşağıdaki sayfalarda desteklenebilir.

W. Smith , W. Rugh , “Doğrusal Olmayan Sistemlerin Bir Sınıfının Yapısında” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-19 , sf. 701-706 , 1974.

K. Shanmugam , M. Lal , “Doğrusal Olmayan Sistemlerin Bir Sınıfının Analizi ve Sentezi” , *Devrelerde ve Sistemlerde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt CAS-23 , sf. 17-25 , 1976.

T. Harper , W. Rugh , “Volterra Sistemlerin Faktörlerin Yapısal Özellikleri” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-21 , sf. 822-832 , 1976.

Birbirine bağlı olan gerçekleştirme problemin işlemleri dikkate değer birbirine bağlı olan yapılara dayanmaması iki dereceli türdeş sistemler için şunda verilmiştir

G. Mitzel , W. Rugh , “Homojen Doğrusal Olmayan Sistemler için Çok Boyutlu S-Dönüşüm ve Gerçekleştirme Probleminde” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-22 , sf. 825-830 , 1977.

E. Gilbert , “Çift Doğrusal ve 2-Güç Girdi-Çıktı Haritaları:Fonksiyonel Serilerin Sınırlı Ebatlı Gerçekleştirmeleri ve Rolü” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-23 , sf. 418-425 , 1978.

Bu sayfaların ilkinde , Laplace dönüşümüne bir cebirsel yaklaşım resmi seriler gösterimine dayanan gelişmedir. Tanınabilir özelliği kullanma , birbirine bağlı olan gerçekleştirmeler belirlenmiş transfer fonksiyonun kısmi bölüm genişlemeden gelişmiştir. İkinci sayfa birbirine bağlı olan yapının uzmanlığını kullanır sözde çift doğrusal girdi-çıktı haritaları (bölüm 6’da tartışılmış olan) türdeş durumda gerçekleştirmelere varmak içindir.

Görüş 4.3: Çift doğrusal denklemlerin burada adlandırılan yazında birçok isimler vardır, “düzenli sistemler” , “içten çift doğrusal sistemler” ve “içten iki-afin sistemler” dahil. Bunların herhangi biri için iyi sonuçları vardır , ve okuyucu anahtardan daha ziyade savaşa teşvik olur. Daha anlamlı konularda , belirlenmiş Volterra sistem için çift doğrusal gerçekleştirme problemin önceki işlemi şunda görünür

A. Isidori , A. Ruberti , “Belirlenmiş Sistemlerin Gerçekleştirme Kuramı” , *Sistem Kuramında Geometrik Metodlar* içinde , D. Mayne , R. Brockett , D. Rediel , Dordrecht , Hollanda , sf. 81-130 , 1973.

Probleme iki yaklaşım sunuldu. İlki üç köşeli çekirdeklerin zinciri için çarpanlara ayırma yaklaşımı (yapıcı olmayan) , ikincisi sözde bölüm 4.3 de aslında Behavior matrisiyle aynı genelleştirilmiş Hankel matrisi içerir. O bu gelişmede düzenli çekirdeğin dahili kullanma nota ilgi çekicidir. Süre ulaşılabilirlik ve gözlenebilirliğin kavramları tanıtılandır , ve gerçekleştirme kuramında zorunlu araçlardır. Bu sayfaların temel içeriklerin çoğu da sayfalarda bulunabilir

P. D’Alessandro , A.Isidori , A. Ruberti , “Çift Doğrusal Dinamik Sistemlerin Gerçekleştirme ve Yapı Kuramı” , *Kontrolde Dergi SIAM* , Cilt 12 , sf. 517-535 , 1974.

A.Isidori , “En Az Çift Doğrusal Gerçekleştirmelerin Direkt Yapımı” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-18 , sf. 626-631 , 1973.

Çift doğrusal gerçekleştirmeyle başka erken sayfa yaklaşımı

R. Brockett , “Çift Doğrusal Sistemlerin Cebirsel Yapımında” , *Değişken Yapı Sistemlerin Kuram ve Uygulama* içinde , R. Mohler , A. Ruberti , Akademik Basın , New York , sf. 153-168 , 1972

Süre ulaşılabilirlik ve gözlenebilirliğin çift doğrusal durum denklemleri ve kavramların çeşitli şekilleri için eşdeğerlikler bu sayfada vurgulandı.

Görüş 4.4: Çift doğrusal gerçekleştirme problemine çok farklı yaklaşım şunda verilmiştir

M. Fliess , "Sur la Realization des Systemes Dynamiques Bilineaires" , *C. R. Akademik Bilim* , Paris , Seri A , Cilt 277 , sf. 122-148 , 1973.

Her ne kadar daha az özlü hesaplamada önersem

M. Fliess , "Un Outil Algebrique: les Series Formelles Noncommutatives" , *Matematik Sistem Kuramı* içinde , G. Marchesini , S. Mitter , eds. , Ekonomi ve Matematik Sistemlerinde Ders Notları , Cilt 131 , Springer-Verlag , New York , sf. 122-148 , 1976.

Bu yaklaşım değiştirilemeyen değişkenlerde resmi serilere göre temsil edilen girdi-çıkı davranışları içerir. Formüllemenin basit şartlar doğasında göstermek , üç köşeli şekilde bir Volterra sistem gösterimi hesaba katar:

$$y(t) = h_0(t) + \int_0^t h_1(t, \sigma_1) u(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^t \int_0^{\sigma_2} h_2(t, \sigma_1, \sigma_2) u(\sigma_1) u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots$$

Varsayalım $h_0(t)$ $t \geq 0$. için analitiktir , ve bu çekirdeklerin her biri şahsi bölge $t \geq \sigma_n \geq \dots \geq \sigma_1 \geq 0$ de analitiktir. Sonra şeklin güç serilerinin gösterimi kullanılabilir.

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j \frac{t^j}{j!} \\ h_1(t, \sigma_1) &= \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} h_{j_0 j_1} \frac{(t-\sigma_1)^{j_0} \sigma_1^{j_1}}{j_0! j_1!} \\ h_2(t, \sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{j_0 j_1 j_2} \frac{(t-\sigma_2)^{j_0} (\sigma_2-\sigma_1)^{j_1} \sigma_1^{j_2}}{j_0! j_1! j_2!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu çekirdek gösterimler iki değişkende değişmeli olmayan resmi seriler sistemine birleştirmenin yöntemini sağlar (ya da iki değişmeli olmayan değişkenlerde resmi seriler),

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} h_j w_0^j + \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} h_{j_0 j_1} w_0^{j_0} w_1^{j_1} + \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{j_0 j_1 j_2} w_0^{j_0} w_1^{j_1} w_2^{j_2} + \dots$$

Volterra sistem gösterme ve değişmeli olmayan seriler gösterme arasında uygunluk sadece bu ilk “birkaç” şartlardan açık hale gelmeli. Değiştirilebilirlik olmayan bu bildiri çok önemlidir , eğer w_0 ve w_1 değişirse , o zaman terimler arasında ayırt etme imkansızdır. Örneğin , değiştirilebilirlik şu anlama gelir

$$w_0 w_1 w_0^2 w_1 w_0^3 = w_0^6 w_1^2 = w_0^2 w_1 w_0^2 w_1 w_0^2$$

Şimdi , sistemin girdi-çıkı özellikleri serilerin özellikleri gibi yorumlanabilir. Örneğin , W doğrusal girdi-çıkı davranışı temsil eder ancak ve ancak W ‘da her sıfır olmayan terimse değişken w_1 ile sonlanır , sabit terim hariç. Diğer bir deyişle , ancak ve ancak W şu şekle sahipse

$$W = h_0 + \sum_{j_1=0}^{\infty} h_{0j_1} w_0^{j_1} w_1 + \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{0j_1 j_2} w_0^{j_2} w_1 w_0^{j_1} w_1 + \dots$$

Sistem için çift doğrusal gerçekleştirme problemi şeklin çift doğrusal durum denklemlerine göre çok doğal olarak kurulan W tarafından tanımlanır

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t)u(t)$$

$$y(t) = cx(t), \quad x(0) = x_0$$

Bu durum eşitlemeyi tekrar yerine koyma yöntemini uygulamak şekilde yazılabilen bir seriler anlatımını verir

$$\begin{aligned} y(t) = & c \left[I + A \int_0^t d\sigma + D \int_0^t u(\sigma) d\sigma + A^2 \int_0^t \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 d\sigma_1 + AD \int_0^t \int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \right. \\ & + DA \int_0^t u(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 d\sigma_1 + D^2 \int_0^t u(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ & \left. + A^3 \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \right] x_0 \end{aligned}$$

Uyarı katsayı matris ürünleri 1 ya da $u(t)$ 'in tekrarlanan integrallerin düzenine doğal bir yolda uyuşur. Bu tekrarlanan integraller çift doğrusal sistemin cevabı için değişmeli olmayan seriler gösterimi sağlama iki değişkende, w_0 ve w_1 , tek birimli tarafından gösterilebilir

$$\begin{aligned} y = & cx_0 + cAx_0w_0 + cDx_0w_1 + cA^2x_0w_0^2 + cADx_0w_0w_1 + cDAx_0w_1w_0 \\ & + cD^2x_0w_1^2 + cA^3x_0w_0^3 + \dots \end{aligned}$$

Tabii, bu değişmeli olmayan serilerdir çünkü $w_0w_1 \neq w_1w_0$ dır.

$$\int_0^t \int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \neq \int_0^t u(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 d\sigma_1$$

Şimdi çift doğrusal gerçekleşebilir bir sonuç hemen belirlenmiş olabilir. W tarafından bir temsil edilmiş sistem çift doğrusal gerçekleşebilir ancak ve ancak iki $m \times m$ matrisler A ve D varsa, bir $m \times 1$ vektör, ve bir $1 \times m$ vektör c öyle ki W da $w_0^{j_k} w_1 w_0^{j_{k-1}} \dots w_1 w_0^{j_0}$ 'in katsayısı $cA^{j_k} DA^{j_{k-1}} \dots DA^{j_0} x_0$ tarafından belirlenmiştir. Bu şart değişmeli olmayan serilerin cebirsel kuramında rasyonellik durumuna eşdeğerdir, ve referanslara hızlı bakış sadece hikayenin başlangıcında olanı gösterir. En az olan kavramlar, süre gerçekleşebilirliği, gözlenebilirlik, ve hatta bir Behavior matrisi, hepsi kuramda formüle edilebilir. Gerçekten sabit Volterra sistemler için düzenli transfer fonksiyonu gösterimi 2-değişken değişmeli olmayan tek terimliye $w_0^{j_k} w_1 \dots w_0^{j_1} w_1$ k -değişken değişebilir tek terimliyi $s_1^{-(j_1+1)} \dots s_k^{-(j_k+1)}$ birleştirmek yoluyla elde edilen değişmeli seriler gibi tanımlanır. Bu bağlantı şunda tartışılır

M. Fliess, "Homojen Sürekli-Zaman Sistemleri Gerçekleştirme ve Transfer Fonksiyonlara Bir Görüş", *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri*, Cilt AC-24, sf. 507-508, 1979.

Görüş 4.5: Çok geniş ölçüde kullandığım çift doğrusal gerçekleştirme kuramına değişim gerçekleştirme yaklaşımı şuna dayanır

A. Frazho, "Çift Doğrusal Sistem Kuramına Değişim Operatör Yaklaşımı", *Kontrol ve Optimizasyonda Dergi SIAM*, Cilt 18, sf. 640-658, 1980.

Homojen sistemler için polinom çarpanlara ayırma yaklaşımı şundan alınmıştır

G. Mitzel , S. Clancy , W. Rugh , “Homojen Doğrusal Olmayan Sistemler İçin Transfer Fonksiyon Gösterimlerde” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-24 , sf. 242-249 , 1979.

Görüş 4.6: Çift doğrusal sistemlerin önemi tahmin sonucuna göre daha fazla doğrulanabilirliği şunda oluşmuştur

H. Susman , “Yarıgrup Temsilleri , Girdi-Çıktı Haritaları ve Genelleştirilmiş Girdilerin Çift Doğrusal Yaklaşımı” , *Matematiksel Sistem Kuramı* içinde , G. Marchesini, S. Mitter, eds. , Ekonomi ve Matematiksel İşlemlerde Ders Notları , Cilt 131 , Springer-Verlag , New York , 1976.

Tek-girdi , tek-çıkı sistemleri için , sonuç aşağıdaki gibi özetlenebilir. Girdi boşluk U , $[0, T]$ de tanımlanan bütün ölçülebilir $u(t)$ fonksiyonları oluşur ve T ve M değişmeyen bütün $t \in [0, T]$ için $|u(t)| \leq M$ tatmin edicidir. Çıkı sinyali $y = F[u]$ tarafından operatör kayıta belirlenmiştir. Varsayılan F nedenseldir , ve $F[u_k]$, $k = 0, 1, \dots$, çıkı sinyallerin sırası olan kanıda sürekli $F[u]$ da daima aynı tarzda bir araya gelir , her neyse girdi sinyallerin serisi girdi u da güçsüzce bir araya gelir. Sonra her $\varepsilon > 0$ için operatör gösterim $y = B[u]$ her $t \in [0, T]$ ve her $u \in U$ için $|F[u] - B[u]| < \varepsilon$ olarak tahmin edilen çift doğrusal gerçekleştirme vardır.

Benzer sonuçlar görüş 4.4 ‘de tartışılan değiştirici olmayan seriler gösterimleri kullanarak elde edilir. Görelim

M. Fliess , “Series de Volterra et Series Formelles Non Commutatives” , *C. R . Akademik Bilim* , Paris , Seri A , Cilt 280 , sf. 965-967 , 1975.

M. Fliess , “Topologies pour Certaines Fonctions de Lignes Non Lineaires; Application aux Asservissements” , *C. R . Akademik Bilim* , Paris , Seri A , Cilt 282 , sf. 321-324 , 1976.

Görüş 4.7: Tabii , az çok diğer gerçekleştirmeler çift doğrusal gerçekleştirmelere ek olarak tartışılabilir. Doğrusal-analitik durum denklemleri bu saygıda çalışılır , yine de çift doğrusal durum denklemlerin yaklaşık olarak uzunluğu değildir. Görelim

R. Brockett , “Volterra Serileri ve Geometrik Kontrol Kuramları” , *Otomatik* , Cilt 12 , sf. 167-176 , 1976 (E. Gilbert , Cilt 12 , sf. 635 ile birlikte)

Göstermesi zor olmayan homojen ya da polinom sistem ancak ve ancak çift doğrusal-analitik gerçekleştirebilir. En az çift doğrusal-analitik gerçekleştirebilir olan nokta en az çift doğrusal gerçekleştirmeden daha düşük boyutlu olabilir. Homojen durum için , çift doğrusal-gerçekleştirebilir sistem için en az doğrusal-analitik gerçekleştirme hesaplamaya göre yöntem şunda verilmiştir

M. Evans , “ k -Güçlerin En Az Gerçekleştirmeleri” , *Bilgi Bilimleri ve Sistemlerinde 1980 Konferansının Yöntemleri* , Elektrik Mühendisliği ve Bilgisayar Bilimi Bölümü , Princeton Üniversitesi , Princeton , New Jersey , sf. 241-245 , 1980.

Polinom sistemler için , en az doğrusal-analitik gerçekleştirme problemi şunda tartışılır

P. Crouch , “Sınırlı Volterra Serinin Dinamik Gerçekleştirmeleri” , *Kontrol ve Optimizasyonda Dergi SIAM* , Cilt 19 , sf. 177-202 , 1981.

Volterra sistem durumunda , bir çok kalıntılar bitmiştir. Az çok doğrusal-analitik gerçekleştirmelere göre olan gidişatlar daha çok benzer örneğe göre gösterilir. Girdi-çıkı davranışıyla sistem hesaplamak

$$y(t) = \tanh \left[\int_0^t u(\sigma) d\sigma \right]$$

0 hakkında hiperbolik tanjantın güç seri genişlemesini kullanma şeklin Bir Volterra sistem gösterimini verir

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t \frac{\alpha_n}{n!} u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n$$

Alfalar kullanılır çünkü gerçek katsayılar oldukça karışıktır. Üç köşeli şekilde , Volterra sitem şu şekilde tekrar yapılabilir

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{n-1}} \alpha_n u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_1$$

Volterra sistem sayısal doğrusal-analitik gerçekleştirmeye sahiptir , yani ,

$$\dot{x}(t) = [1 - x^2(t)]u(t)$$

$$y(t) = x(t) , \quad x(0) = 0$$

ama sınırlı-ebatlı çift doğrusal gerçekleştirme yok. Volterra sistemleri için doğrusal-analitik gerçekleştirebilir ve çift doğrusal gerçekleştirebilir gösterime ek olarak denk değildir , bu örnek sonsuz-ebatlı çift doğrusal gerçekleştirmelerin nasıl gösterileceği ilginç olmalı. Üç köşeli çekirdeklerin basit hesaplaması için gösterilen Volterra sistemi şeklin gerçekleştirmesine sahiptir

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sonsuz-ebatlı çift doğrusal gerçekleştirmeler görüş 4.5 de Frazho tarafından bahsedilen sayfada tartışıldı , ve şunda

G. Koch , “Sonsuz Ebatlı Çift Doğrusal Sistemler için Gerçekleştirme Teoremi” , *Ricerche di Automatic* , Cilt 3 , 1972.

R. Brockett , “Sınırlı ve Sınırsız Ebatlı Çift Doğrusal Gerçekleştirme” , *Franklin Enstitüsünün Dergisi* , Cilt 30 , sf. 509-520 , 1976.

W. Wong , “Volterra Serisi , Evrensel Çift Doğrusal Sistemler ve Fock Gösterimleri” , *Bilgi Bilimleri ve Sistemlerinde 1979 Konferansının Yöntemleri* , Elektrik Mühendisliği Bölümü , Johns Hopkins Üniversitesi , Baltimor , sf. 207-213 , 1979.

Tabii , durum denklemleri açısından gerçekleştirmeler doğrusal-analitikten daha çok genel olsa da dikkate alınabilir. Çok genel durum denklemleri açısından 2-dereceli homojen sistemler için gerçekleştirilebilir ve en az olmanın dönüşüm-bölge nitelendirmesi şunda verilmiştir

E. Gilbert , “Doğrusal Olmayan I-O Haritaları için En Az Gerçekleştirmeler:Sürekli-Zaman 2-Güç Durumu” , *Bilgi Bilimleri ve Sistemlerinde 1978 Konferansının Yöntemleri* , Elektrik Mühendisliği Bölümü , Johns Hopkins Üniversitesi , Baltimor , sf. 308-316 , 1978.

Daha fazla sonuçlar , en az gerçekleştirmelerin durum boşlukları olan olgu ve en az gerçekleştirmeler için doğal biçimi kapsayarak benzer şekilliliğin dikkate değer türü tarafından ilişki kurulur , şunda ortaya çıkar

E. Gilbert , “Sürekli-Zaman 2-Güç Girdi-Çıktı Haritaları için En Az Gerçekleştirmeler” , *Otomatik Kontrolde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Enstitüsü İşlemleri* , Cilt AC-26 , 1981.

BÖLÜM 5

SABİT SİSTEMLERİN KARAKTERİSTİK KARŞILIKLARI

Özel bir giriş sinyali için bir homojen sistemin karşılığını hesaplama metotları önceki bölümde ele alındı. Bütünleşmeler zaman-alan temsilinde dışarı taşınabilirler yada değerler metodunun birliği dönüşen alan içinde kullanılabilir. Düzenli transfer fonksiyonunun süresinde daha açık bir yaklaşım, girişin üslerin toplamı olduğu zamanda kullanılabilir. Bir polinomial sistem için yanıt hesaplaması, uygun bir simgeyi bulmak zor olmasına rağmen, basitçe homojen altsistem yanıtlarını ekleme meselesidir. Aynısı, aynı noktada birleşmiş noktaların ilave karışıklığı ile birlikte Volterra sistemlerin doğruluğudur.

Giriş sinyallerinin özel tipleri için, homojen bir sistemin karşılığı, genellikle doğrusal sistemlerin iyi bilinen özellikleri gibi özel nitelikleri vardır. Bu özellikle sabit sabit sistem durumlarında doğrudur, ve böylece, ben sadece o durumu ele alacağım. İmpuls girişlerine yanıt, sinuzoidal girişlerine sabit durum yanıtı, ve stochastic girişlerinin yanıtlarının özellikleri dikkate alınacak. Görüşlerin çoğu simetrik çekirdek ya da simetrik transfer fonksiyonunun dönemlerinde olacak. Bu, hem alışma meselesi hem de formüllerin genellikle simetrik göstergeler bakımından ifade edildiğinde basit bir formda gözüktüğü gerçeğinin bir sonucudur. Bu bölümdeki maddeler bölüm 7 deki tartışma problemleri ile bağlantıda yararlı olacak.

5.1. İmpuls Girişlerini Yanıtlamak:

Bu bölümde impuls fonksiyonlarının girişler birleşimi için olan homojen sistemlerin yanıtları hesaplanacak. Polynomial veya volterra sistem durumları için, homojen-alt sistem yanıtlarını eklemekten daha fazlası yapılamazdı. Simetrik çekirdek simgesi bu bölümün başından sonuna kadar kullanılacak. Tabii ki, bu çekirdekler impuls'ı serbest bıraktıkları farz edilecek, böylece impuls yanıtını tanımlamak garanti olur.

Kesinlikle, doğrusal sistem için bunu hatırlatarak okuyucuyu sıkacağım.

$$y(t) = \int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma \quad (1)$$

giriş $u(t) = \delta_0(t)$, $y(t) = h(t)$, $t \geq 0$ sonucunu verir. Bu, doğrusal bir sistemin impuls yanıtı çekirdeği ortaya çıkarır. Bir $n(>1)$ derecesi için homojen sistem

$$y(t) = \int_0^t h_{sym}(t-\sigma_1, \dots, t-\sigma_n)u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (2)$$

giriş $\delta_0(t)$, $h_{sym}(t, \dots, t), t \geq 0$ sonucunu verir.

İmpulsların toplamının meydana getirdiği girişler dikkate alındığı zaman daha ilginç hesaplamalar ortaya çıkar. Örneğin, (2)deki girişi şöyle farz edelim

$$u(t) = \delta_0(t) + \delta_0(t-T), \quad T > 0 \quad (3)$$

sonucu hesaplamanın bir yolu terimleri toplamak

$$u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) = [\delta_0(\sigma_1) + \delta_0(\sigma_1-T)] \cdots [\delta_0(\sigma_n) + \delta_0(\sigma_n-T)] \quad (4)$$

ve her terimi eklemek. Bu zor değil çünkü, simetrik ve bazı basit kombinasyonlar yardımcı olur. İndeksler değişik sıraya koyulabilir, böylece (4)de ortaya çıkan genel terim şu biçimi alır;

$$\delta_0(\sigma_1) \cdots \delta_0(\sigma_m) \delta_0(\sigma_{m+1}-T) \cdots \delta_0(\sigma_n-T)$$

bütünleşmelerin sonucundaki değişimler olmaksızın. Aslında, (4)den $\binom{n}{m}$ terimleri olacak ki bunlar bu ayrıntılı formda yazılabilir. Böylece, sonuç şöyledir:

$$y(t) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} h_{sym}(\underbrace{t, \dots, t}_m, \underbrace{t-T, \dots, t-T}_{n-m}) \quad (5)$$

şimdi derece-n (2) sistemindeki girişin olduğu yerdeki genel durumu göz önünde bulundurursak

$$u(t) = \delta_0(t) + \delta_0(t-T_1) + \cdots + \delta_0(t-T_{p-1}) \quad (6)$$

$T_1, \dots, T_{p-1}$ 'nin farklı bir pozitif sayılar kümesi olduğu yerde. Tekrar, prosedür sonucu büyütür;

$$u(\sigma_1) \cdots u(\sigma_n) = [\delta_0(\sigma_1) + \cdots + \delta_0(\sigma_1-T_{p-1})] \cdots [\delta_0(\sigma_n) + \cdots + \delta_0(\sigma_n-T_{p-1})]$$

ve sonra bütünleşmeler her bir terimi işletir. Fakat, indislerin permutasyonu bu bütünleşmeleri etkilemez, ve böylece sonuçtaki genel terim formda yazılabilir;

$$\delta_0(\sigma_1) \cdots \delta_0(\sigma_{m_1}) \delta_0(\sigma_{m_1+1}-T_1) \cdots \delta_0(\sigma_{m_1+m_2}-T_1) \\ \cdots \delta_0(\sigma_{n-m_p+1}-T_{p-1}) \cdots \delta_0(\sigma_n-T_{p-1})$$

$m_1, \dots, m_p$ parçası için bu yolla yazılabilen terimlerin numaralarını hesaplamak multinominal katsayıları ortaya çıkarır, ve sonuç bu yolla verilir;

$$y(t) = \sum_m \frac{n!}{m_1! \cdots m_p!} h_{sym}(\underbrace{t, \dots, t}_{m_1}, \dots, \underbrace{t-T_{p-1}, \dots, t-T_{p-1}}_{m_p}) \quad (7)$$

$\sum_m$ 'nin p-bağ özeti tüm tamsayı indisler $m_1, \dots, m_p$ gibi olduğu yerde şöyledir;

$$0 \leq m_i \leq n \text{ and } m_1 + \cdots + m_p = n.$$

5.2. Sinuzoidal Girişler için Hazır-Durum Yanıtı

Bu bölümün geri kalanı için, sabit durum yanıt özellikleri esas yararın nesnesi olacak. Böylece sabit durum yanıtlarının sınırlandırılmasını garantilemek için giriş-çıkış süreklilik özelliklerinin gözönünde tutulmasına ihtiyaç duyulur. Zaman alanında,

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_{sym}(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \cdots dt_n < \infty$ olan bir derece-n homojen sisteminin sınırlı giriş, sınırlı çıkış sürekliliği için yeterli bir şart olan bölüm 1.3'teki sınırlı hesaplamalardan anlaşılırdır.

Fakat, simge dönüşüm dönemlerinde, şartlar bulmak için daha zordur. Doğrusal sistemler için iyi bilinen bir durum bir sistemin garantili giriş, garantili çıkış sabiti olduğu, eğer ve sadece eğer transfer fonksiyonlarının tüm kutupları gerçek negatif parçalara sahip

olan transfer fonksiyonlarındaki makul azalma tarafından tanımlanmıştır. Derece-n durumlarında(n>1), benzer tiplerin yeterli bir durumu sistemlerin tanımlanması için tam doğru, tanımlanabilir, düzenli transfer fonksiyonları(problem 4.16) tarafından verilebilir. Maalesef, bu sonuç simetrik transfer fonksiyonlarının dönemlerindeki durumlar için çok az basittir. Üstelik, genel simetrik polinomlardaki zorluk, faktörlerdeki kontrolü zorlaştırır. Böylece, süreklilik özellikleri, basitçe varsayılacak bir makul sabit durum analizleri için ihtiyaç duyulur.

Sabit bir doğrusal sistem

$$y(t) = \int_0^t h(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma \quad (8)$$

tek kenarlı giriş sinyaline yanıtı göz önünde tutmakla tanımlanır.

$$u(t) = 2A\cos(\omega t), \quad t \geq 0 \quad (9)$$

Karmaşık üs formundaki bu girişi yazmak daha uygundur

$$u(t) = Ae^{i\omega t} + Ae^{-i\omega t} \quad (10)$$

sonra

$$y(t) = A \int_0^t h(\sigma)e^{i\omega(t-\sigma)} d\sigma + A \int_0^t h(\sigma)e^{-i\omega(t-\sigma)} d\sigma \quad (11)$$

yada

$$y(t) = A \left[\int_0^t h(\sigma)e^{-i\omega\sigma} d\sigma \right] e^{i\omega t} + A \left[\int_0^t h(\sigma)e^{i\omega\sigma} d\sigma \right] e^{-i\omega t} \quad (12)$$

sistemin sabit olduğunu farzetmek, $t \rightarrow \infty$ integraller $H(i\omega)$ ve $H(-i\omega)$ bir noktada birleştirir, anılan sıraya göre sistem transfer fonksiyonunun olduğu yerde.

$$H(s) = \int_0^\infty h(\sigma)e^{-s\sigma} d\sigma \quad (13)$$

Böylece, T yi yeteri kadar büyük seçerek, bütün $t \geq T$ için sistem yanıtı bilinen sabit durum yanıtının belirtilen toleransı içinde olması garanti edilebilir.

$$y_{ss}(t) = AH(i\omega)e^{i\omega t} + AH(-i\omega)e^{-i\omega t} \quad (14)$$

Tabii ki standart benzerlikleri kullanmak bu sabit durum yanıtı formlarda tekrar yazılabilir

$$y_{ss}(t) = 2A \operatorname{Re}[H(i\omega)]\cos(\omega t) - 2A \operatorname{Im}[H(i\omega)]\sin(\omega t) \quad (15)$$

ya da

$$y_{ss}(t) = 2A|H(i\omega)|\cos[\omega t + \angle H(i\omega)] \quad (16)$$

standart rakamlar ve işaretler sistemlerinin gerçek kısım, sanal kısım, büyüklük ve açı için kullanıldığı yerde. Bu hesaplamalar iyi bilinen bir gerçeği açık hale getirir ki ω sıklığındaki sinüs girdisinde bir doğrusal sistemin sabit durum yanıtı, $s=i\omega$ nin değerlendirildiği transfer fonksiyon açısı ve büyüklüğü tarafından karar verilen evre ve genişlik ile aynı sıklıktaki sinüsdür. (şunu belirtmeliyim ki, sabit durumu görmek için bir başka yol var. Giriş $t = -\infty$ da başlamak için dikkate alınabilir ve sonra sınırlı herhangi bir t 'deki yanıt sabit durum yanıtıdır.)

Şimdi bu sonuçların genelleştirilmesi şu formül tarafından tanımlanan homojen sistemler için göz önünde tutulur:

$$y(t) = \int_0^t h_{sym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (17)$$

fakat ben başlamadan önce, sinüzoidal girişler için doğrusal olmayan bir sistemin yanıtını tartışmaktaki ortak bir güçlüğü belirtmek mantıklı görünüyor. Doğrusal sistemlerle çalışırken, $2Ae^{i\omega t}$ faz açısının gerçek kısmı olarak (9)'daki girişi göz önünde tutmak ortaktır. Sonra bu

karmaşık giriş için olan sistemin yanıtı hesaplanır, ve sonra (9) için olan sistemin yanıtı faz açısı için olan yanıtın gerçek kısmını alarak basitçe bulunur. Aslında, bu kısayol doğrusallığın üzerine önemine dayanır, aşağıdaki örneklerin gösterdiği gibi.

Örnek 5.1: giriş (9) için sistem $y(t)=u^2t$ 'nin yanıtını hesaplamak için, giriş $u_1(t)=2Ae^{i\omega t}$ 'nin uygulaması $y_1(t)=4A^2e^{i\omega t}$ yanıtını verir. Sonra (9) için sistem yanıtı olan bir hatalı sonuç $y(t)=4A^2\cos(2\omega t)$ 'dur. Bu hatalıdır çünkü direkt (9)'un uygulaması $y(t)=4A^2\cos^2(\omega t)=2A^2+2A^2\cos(2\omega t)$ 'dir.

Tek kenarlı giriş sinyali (10) ile (17)'nin yanıtı şundan hesaplanabilir:

$$y(t) = \int_0^t h_{sym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \prod_{j=1}^n [Ae^{i\omega(t-\sigma_j)} + Ae^{-i\omega(t-\sigma_j)}] d\sigma_1 \dots d\sigma_n \quad (18)$$

bu ifadeyi daha yararlı bir şekle sokmak için, bölüm 2.4'ün çift-üs-giriş geliştirmesini taklit edeceğim. bu gelişmelere $\lambda_1 = i\omega$ ve $\lambda_2 = -i\omega$ yararları izin vermek, sonra

$$\begin{aligned} y(t) &= A^n \int_0^t h_{sym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 \exp[\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j}(t-\sigma_j)] d\sigma_1 \dots d\sigma_n \\ &= A^n \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 \left[\int_0^t h_{sym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \exp(-\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} \sigma_j) \right. \\ &\quad \left. d\sigma_1 \dots d\sigma_n \exp(\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} t) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Doğrusal durum için benzer bir davranışta, t 'nin büyük değeri için yanıt gözönünde tut. Sistemin sürekliliğini farzetmek, (19) daki desteklenmiş dönem $t \rightarrow \infty$ gibi $H_{sym}(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n})$ 'ye yaklaşır. Böylece (19)'daki $y(t)$, (14)'e benzerliği açık bir ifade tarafından sabit-durum yanıt tanımı için keyfi kapalı olur.

$$y_{ss}(t) = A^n \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 H_{sym}(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n}) \exp(\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} t) \quad (20)$$

benzer üslerle $[k\lambda_1 + (n-k)\lambda_2]$ birlikte bu terimleri birlikte toplamak ve λ_1 ve λ_2 nin tanımlarını tekrar almak, (20)'de yazılabilen

$$y_{ss}(t) = A^n \sum_{k=0}^n G_{k,n-k}(i\omega, -i\omega) e^{i(2k-n)\omega t} \quad (21)$$

gibi şunun olduğu yerde

$$\begin{aligned} G_{k,n-k}(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+\dots+k_n=2n-k}}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 H_{sym}(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n}) \\ &= \binom{n}{k} H_{sym}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_k; \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n-k}) \end{aligned} \quad (22)$$

(22)'den takip edilen bir yararlı benzerlik şudur:

$$G_{k,n-k}(i\omega, -i\omega) = G_{n-k,k}(-i\omega, i\omega)$$

(21)'deki terimler aşağıdaki gibi yeniden düzenlemek mümkündür. İlk önce şu yazılır:

$$\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= A^n [G_{n,0}(i\omega, -i\omega) e^{in\omega t} + G_{0,n}(i\omega, -i\omega) e^{-in\omega t}] \\
&+ A^n [G_{n-1,1}(i\omega, -i\omega) e^{i(n-2)\omega t} + G_{1,n-1}(i\omega, -i\omega) e^{-i(n-2)\omega t}] \\
&+ \dots + \begin{cases} A^n G_{n/2,n/2}(i\omega, -i\omega), & n \text{ even} \\ A^n [G_{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}}(i\omega, -i\omega) e^{i\omega t} + G_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}}(i\omega, -i\omega) e^{-i\omega t}], & n \text{ odd} \end{cases} \\
&= A^n [G_{n,0}(i\omega, -i\omega) e^{in\omega t} + G_{n,0}(-i\omega, i\omega) e^{-in\omega t}] \\
&+ A^n [G_{n-1,1}(i\omega, -i\omega) e^{i(n-2)\omega t} + G_{n-1,1}(-i\omega, i\omega) e^{-i(n-2)\omega t}] \\
&+ \dots + \begin{cases} A^n G_{n/2,n/2}(i\omega, -i\omega), & n \text{ even} \\ A^n [G_{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}}(i\omega, -i\omega) e^{i\omega t} + G_{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}}(-i\omega, i\omega) e^{-i\omega t}], & n \text{ odd} \end{cases}
\end{aligned} \tag{23}$$

Şimdi, standart benzerlikleri kullanmak,

$$\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= 2A^n |G_{n,0}(i\omega, -i\omega)| \cos[n\omega t + \angle G_{n,0}(i\omega, -i\omega)] \\
&+ 2A^n |G_{n-1,1}(i\omega, -i\omega)| \cos[(n-2)\omega t + \angle G_{n-1,1}(i\omega, -i\omega)] \\
&+ \dots + \begin{cases} A^n G_{n/2,n/2}(i\omega, -i\omega), & n \text{ even} \\ 2A^n |G_{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}}(i\omega, -i\omega)| \cos[\omega t + \angle G_{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}}(i\omega, -i\omega)], & n \text{ odd} \end{cases}
\end{aligned} \tag{24}$$

Böylece, frekans ω 'nin bir cosinüzoidal girişine olan bir derece-n homojen sisteminin sabit-durum yanıtı frekans $n\omega$ 'deki $(n-2)\omega, \dots, 0$ (herhangi) ya da ω (n eski) cosinüzoidal bileşenlerinden meydana gelir.

Şimdi bir derece-N polinomial sistemi giriş sinyali $u(t)=2A\cos(\omega t)$ ile birlikte

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} h_{nsym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \dots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n \tag{25}$$

göz önünde tut. Sabit-durum yanıtı her homojen alt sisteminin katkılarının eklenmesiyle elde edilir. n 'nin tek sayı olduğu yerdeki her derece-n alt sistemi $\omega, 3\omega, \dots, n\omega$ frekanslarındaki dönemlere katkıda bulunur. n 'nin çift sayı olduğu yerdeki her derece-n alt sistemi $2\omega, 4\omega, \dots, n\omega$ frekanslarındaki bir değişmez dönem ya da dönemlere katkıda bulunur. $k \leq n$ ve k ve n aynı eşitliğe sahip olduğu farzedilerek, $k\omega$ frekansına olan derece-n alt sisteminin (23)'teki katılım şudur:

$$A^n G_{\frac{n+k}{2}, \frac{n-k}{2}}(i\omega, -i\omega) e^{ik\omega t} + A^n G_{\frac{n+k}{2}, \frac{n-k}{2}}(-i\omega, i\omega) e^{-ik\omega t} \tag{26}$$

(alt sistemin derecesini belirten G üzerindeki altscripplerin toplamına ve altscrippler harmoniğinin farkına dikkat etmek yararlıdır.) Böylece k gibi aynı eşitlikle birlikte N_k 'nin en büyük tamsayı $\leq N$ olmasına izin vermek, (25)'in sabit-durum yanıtı şöyle yazılabilir

$$y_{ss}(t) = f_0(A, i\omega) + \sum_{k=1}^N [f_k(A, i\omega) e^{ik\omega t} + f_k(A, -i\omega) e^{-ik\omega t}] \tag{27}$$

olduğu yerde

$$f_0(A, i\omega) = A^2 G_{1,1}(i\omega, -i\omega) + A^4 G_{2,2}(i\omega, -i\omega) + \dots + A^{N_2} G_{\frac{N_2}{2}, \frac{N_2}{2}}(i\omega, -i\omega) \quad (28)$$

$$f_1(A, i\omega) = A G_{1,0}(i\omega, -i\omega) + A^3 G_{2,1}(i\omega, -i\omega) + \dots + A^{N_1} G_{\frac{N_1+1}{2}, \frac{N_1-1}{2}}(i\omega, -i\omega) \quad (29)$$

$$f_0(A, i\omega) = A^2 G_{2,0}(i\omega, -i\omega) + A^4 G_{3,1}(i\omega, -i\omega) + \dots + A^{N_2} G_{\frac{N_2+2}{2}, \frac{N_2-2}{2}}(i\omega, -i\omega) \quad (30)$$

ve böyle. Genel terimler formlarda yazılabilir

$$f_0(A, i\omega) = \sum_{j=1}^{N_2/2} A^{2j} G_{jj}(i\omega, -i\omega)$$

$$f_k(A, i\omega) = \sum_{j=0}^{(N_k-k)/2} A^{k+2j} G_{k+j,j}(i\omega, -i\omega), k=1,2,\dots,N \quad (31)$$

şimdi her zamanki gibi, (27) şöyle yazılabilir:

$$y_{ss}(t) = f_0(A, i\omega) + 2 \sum_{k=1}^N |f_k(A, i\omega)| \cos[k\omega t + \angle f_k(A, i\omega)] \quad (32)$$

Bunun yanında fourier katsayı giriş genişliği A'da giriş frekansı ω 'nin fonksiyonları olan katsayılarla birlikte polinomialdır.

Örnek 5.2. Örnek 3.8'deki sarkaç sistemini göz önünde tutun. Derece 3'e doğru simetrik transfer fonksiyonları kullanmak, $u(t)=2A\cos(\omega t)$ 'ye sabit-durum yanıtı şundan verilir:

$$y_{ss}(t) = 2 |AH(i\omega) + 3A^3 H_{3sym}(i\omega, i\omega, -i\omega) + \dots| \cos[\omega t + \phi_1(\omega)] + 2 |A^3 H_{3sym}(i\omega, i\omega, i\omega) + \dots| \cos[3\omega t + \phi_3(\omega)]$$

bü elverişlidir

$$W(s) = \frac{g/L}{s^2 + (a/mL^2)s + g/L}$$

ve şu formda örnek 3.8'deki transfer fonksiyon hesaplamalarını yaz:

$$H(s) = \frac{1}{mgL} W(s)$$

$$H_{3sym}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{3!(mgL)} W(s_1)W(s_2)W(s_3)W(s_1 + s_2 + s_3)$$

Sonra

$$y_{ss}(t) = 2 \left| \frac{A}{mgL} W(i\omega) + \frac{A^3}{2(mgL)^3} W^3(i\omega)W(-i\omega) + \dots \right| \cos[\omega t + \phi_1(\omega)]$$

$$+ 2 \left| \frac{A^3}{3(mgL)^3} W^3(i\omega)W(i3\omega) + \dots \right| \cos[3\omega t + \phi_3(\omega)] + \dots$$

Bu formülün basit bir analizi giriş frekansı ω 'dan daha yüksek frekanstaki sarkaç sistemindeki olağanüstü rezonansın olabilirliğini göstermek için kullanılabilir. Bu fenomen çok küçük A giriş genliği için meydana gelebilir, fakat sarkaçın genel doğrusallaşmış modeli tarafından önceden bildirilmez. Özel olmak için, farz et ki katsayı a'yi indirmek $(g/L)^{1/2}$ ile ilişkisinde çok küçük olsun. Sonra W(s)'nin kutupları doğal frekans $\omega_0 = (g/L)^{1/2}$ 'yi indirmemek için çok kapalıdır. Bu durumda, eğer $\omega = \omega_0 / 3$ ise, sonra $|W(i3\omega)|$, $|W(i3)|$ ile mukayesede çok büyük olabilir bu yüzden $y_{ss}(t)$ 'deki yüksek olan terim üçüncü harmoniktir. Tabii ki, çıkıştaki üçüncü harmonik terim ve esas terimin ikisi birlikte iptal edilmiş daha

yüksek derece transfer fonksiyonuna dayanır. Fakat, bu kayıp terimler rezonansın olabilirliğini elemeyi gösterebilir. Aslında, daha yüksek-derece terimler giriş frekansının çoğu diğer seçeneklerinde harmonik rezonansın olabilirliğini gösterirler.

Görüşün simetrik transfer fonksiyonunun terimlerinde çok uzak olmasına rağmen, benzer sonuçlar üç köşeli ve düzenli transfer fonksiyonları için elde edilebilir. Bunu yapmanın bir yolu, Bölüm 2’de ele alınmış olan çeşitli transfer fonksiyonlarının arasındaki ilişkiyi kullanmaktır. Aslında, bilinear-anlaşılabilir düzenli transfer fonksiyonlarının durumundaki direk bir geçit yolunu almak ilginçtir, çünkü gerekli süreklilik özelliği belirgin durumda olabilir.

Farz edelim ki

$$H_{reg}(s_1, \dots, s_n) = \frac{P(s_1, \dots, s_n)}{Q_1(s_1) \dots Q_n(s_n)} \quad (33)$$

tamamen doğru, onaylanabilir, düzenli bir transfer fonksiyonudur. $u(t) = 2A \cos(\omega t)$ giriş sinyaliyle birlikte bölüm 2.3’teki teorem 2.10 $\gamma_1 = i\omega, \gamma_2 = -i\omega$ ile birlikte şu formül karşılığını verir:

$$Y(s) = A^n \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_{n-1}=1}^2 H_{reg}(s + y_{i_1} + \dots + y_{i_{n-1}}, \dots, s + y_{i_{n-1}}, s) \quad (34)$$

$$\left[\frac{1}{s + y_{i_1} + \dots + y_{i_{n-1}} + i\omega} + \frac{1}{s + y_{i_1} + \dots + y_{i_{n-1}} - i\omega} \right]$$

(34)’deki terimlerin her biri tamamen anlaşılır olduğundan beri, s ’de rasyonel fonksiyonlar, sabit-durum yanıtı kısmi bölüm genişlemesi yoluyla hesaplanabilir. Eğer $H_{reg}(s_1, \dots, s_n)$ ’nin tüm kutuplarının negatif gerçekte kısımlarının olduğu farz edilirse, bu, her bir $Q_j(s_j)$ ’nin tüm köklerinin gerçekte kısımlarını olduğudur, sonra kutup faktörlerine, transfer fonksiyonunun sabit-durum yanıtının ilişkilendirilmesi gibi görmezden gelinmesiyle yardım edilir. Bunun yanı sıra, aşağıdaki formülden meydana gelen (34) deki kutuplara yardım edilmesinden beri hazır-durum yanıtının sınırlarının koyulduğu açıktır.

$$s = \pm i n \omega, \pm i(n-2)\omega, \dots, \begin{cases} \pm i \omega, n \\ 0, n \end{cases}$$

odd

even

Sabit-durum yanıtını hesaplamak için, $A^n K_k(i\omega)$ 'nin için kısmi bölüm genişmesi katsayısının (34)ün sağ tarafındaki faktör $(s-ik\omega)$ 'ne benzer olmalı.

$$\begin{aligned}
A^n K_k(i\omega) &= (s - ik\omega)Y(s) \big|_{s=ik\omega} \\
&= A^n \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_{n-1}=1}^2 H_{reg}(s + \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_{n-1}}, \dots, s + \gamma_{i_{n-1}}, s) \big|_{s=ik\omega} \\
&\quad \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_{n-1}} = -i(k+1)\omega \\
&+ A^n \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_{n-1}=1}^2 H_{reg}(s + \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_1}, \dots, s + \gamma_{i_{n-1}}, s) \big|_{s=ik\omega} \tag{35} \\
&\quad \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_{n-1}} = -i(k+1)\omega
\end{aligned}$$

Bu formül iki zorlamalı, çeşitli özetleri tam bir toplamın içinde birleştirilerek basitleştirilebilir ve sonra s yerine $ik\omega$ koyulur. Bu da şunu verir:

$$\begin{aligned}
K_k(i\omega) &= \sum H_{reg}(ik\omega + \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_{n-1}}, \dots, ik\omega + \gamma_{i_{n-1}}, ik\omega) \big| \\
&\quad \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} = \pm i\omega \\
&\quad \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = -i(k \pm 1)\omega
\end{aligned} \tag{36}$$

(36)daki terim karmaşık olduğunda, küçük n için yazmanın zor olmadığına dikkat edin. Ve genelde,

$$K_n(i\omega) = H_{reg}(i\omega, i2\omega, \dots, in\omega)$$

Son adım kısmi bölüm genişmesindeki her bir terimin Laplace biçim değiştirmenin tersini almak.

$$\frac{K_k(i\omega)}{(s - ik\omega)}$$

Standart trigonometrik tanımları kullanmak, sabit-durum yanıtını şu verir:

$$\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= 2A^n |K_n(i\omega)| \cos[n\omega t + \angle K_n(i\omega)] \\
&+ 2A^n |K_{n-2}(i\omega)| \cos[(n-2)\omega t + \angle K_{n-2}(i\omega)] \\
&\tag{37}
\end{aligned}$$

$$+ \dots + \left\{ - \begin{matrix} A_n K_0(i\omega), n \end{matrix} \right.$$

$$2A^n |K_1(i\omega)| \cos[\alpha + \angle K_1(i\omega)], n$$

Polinomial sistemler için, daha erken görüşülmesiyle birlikte çeşitli homojen alt sistemlerin katkıları eklenebilir.

5.3. Çok-Tonlu Girişler için Sabit-Durum Yanıtı

Bir sinüsoydallar toplamı 1'den daha büyük derecenin bir homojen sistemine eklendiğinde, yanıt farklı frekansların dönemleri arasındaki doğrusal olmayan etkileşimler tarafından zorlaştırılır. Bu konuyu anlatmak için, iki ton giriş ile başlayacağım:

$$\begin{aligned} u(t) &= 2A_1 \cos(\omega_1 t) + 2A_2 \cos(\omega_2 t), t \geq 0 \\ &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \quad (38)$$

Tekrar, bölüm 2'deki üslü gelişme büyümesi kullanılabilir, 4 üslü durum için bu zaman:

$$\lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = -i\omega_1, \lambda_3 = i\omega_2, \lambda_4 = -i\omega_2$$

Simetrik transfer fonksiyonu $H_{sym}(s_1, \dots, s_n)$ ile birlikte bir derece-n sistemi için, ayrılan değişikliklerle birlikte bölüm 2.4'teki kopya(73) şunu verir

$$y_{ss}(t) = \sum_m A_1^{m_1+m_2} A_2^{m_3+m_4} G_{m_1 m_2 m_3 m_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_4 \lambda_4)t} \quad (39)$$

$$G_{m_1 m_2 m_3 m_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3! m_4!} H_{sym}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\lambda_4, \dots, \lambda_4}_{m_4}) \quad (40)$$

ve $0 \leq m_i \leq n$ ve $m_1 + \dots + m_4 = n$ gibi $m_1, \dots, m_4$ üzerine $\sum_m$ 'nin bir 4-kat özetinin olduğu yerde.

λ 'lar için yerine koyma şunu verir:

$$y_{ss}(t) = \sum_m A_1^{m_1+m_2} A_2^{m_3+m_4} G_{m_1 m_2 m_3 m_4}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2) e^{i[(m_1 - m_2)\omega_1 + (m_3 - m_4)\omega_2]t} \quad (41)$$

Örnek 5.3: $n=2$ durumu için (41)De ki katalog terimlere belki öğretici katalogdur. Özetinde 10 terim var ve bunlar tablo 5.1'de gösteriliyorlar. Gerçek miktarların terimlerindeki çıkışı yazmak, $G_{m_1 m_2 m_3 m_4}$ nin özelliklerini karmaşıklıklaştırma çekimini ele almakla birlikte kullanılabilir. Örneğin,

$$G_{0110}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2) = 2H_{2sym}(-i\omega_1, i\omega_2)$$

Ve

$$G_{1001}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2) = 2H_{2sym}(i\omega_1, -i\omega_2)$$

Bu yüzden $G_{0110} = \overline{G}_{1001}$ olduğu açıktır, karmaşık çekmeyi belittiği yerde. Benzer,

$$G_{1010} = \overline{G}_{0101}, \quad G_{2000} = \overline{G}_{0200}, \quad G_{0020} = \overline{G}_{0002}$$

Böylece standart trigonometrik tanımlar şu ifadeyi ortaya çıkarır

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) = & A_1^2 G_{1100} + A_2^2 G_{0011} + 2A_1 A_2 |G_{0110}| \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \angle G_{0110}] \\ & + 2A_1 A_2 |G_{1010}| \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \angle G_{1010}] + 2A_1^2 |G_{2000}| \cos[2\omega_1 t + \angle G_{2000}] \\ & + 2A_2^2 |G_{0020}| \cos[2\omega_2 t + \angle G_{0020}] \end{aligned}$$

Dikkat edilmeliki bu frekans parçaları farklı frekanslarda meydana gelmeye ihtiyaçları vardır. Örneğin, $\omega_3 = 3\omega_1$ durumunu ele alın.

Tablo 5.1

Örnek 5.3 için Frekans-Yanıt Terimleri

Özet	indexler	Özet
1	1 0 0	$A_1^2 G_{1100}$
0	1 1 0	$A_1 A_2 G_{0110} e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}$
0	0 1 1	$A_2^2 G_{0011}$
1	0 0 1	$A_1 A_2 G_{1001} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}$
1	0 1 0	$A_1 A_2 G_{1010} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}$
0	1 0 1	$A_1 A_2 G_{0101} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}$
2	0 0 0	$A_1^2 G_{2000} e^{i2\omega_1 t}$
0	2 0 0	$A_1^2 G_{0200} e^{-i2\omega_1 t}$
0	0 2 0	$A_2^2 G_{0020} e^{i2\omega_2 t}$
0	0 0 2	$A_2^2 G_{0002} e^{-i2\omega_2 t}$

Daha yüksek, dereceli homojen sistemler göz önünde tutulduğu zaman, sabit-durum yanıtındaki terimlerin numarası düşer. Bu yüzden, çıkıştaki özel bir karmaşık üslü terimin katsayısını veren bir ifade elde etmek için daha kullanışlı görünür. Çok yada az terimler istenir sonra ele alınabilir ve üslü terimler eğer gerçek form isteniyorsa birleştirilebilirler.

Üslü $e^{i(M\omega_1 + N\omega_2)t}$, $M \geq 0, N \geq 0$ 'e benzer (41)'deki terimler aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2=0}^n \sum_{m_3=0}^n \sum_{m_4=0}^n A_1^{2m_2+M} A_2^{2m_4+N} G_{m_2+M, m_2, m_4+N, m_4}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2)$$

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n$
 $m_1 = m_2 + M, m_3 = m_4 + N$

Fakat şimdi 4-kat özet şunu elde etmek için belirlenmiş kısıtlamaları kullanan m_1 ve m_3 yerleştirilmesiyle kolaylaştırılabilir:

$$\sum_{m_2=0}^n \sum_{m_4=0}^n A_1^{2m_2+M} A_2^{2m_4+N} G_{m_2+M, m_2, m_4+N, m_4}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2) \quad (42)$$

$m_2+m_4=\frac{n-M-N}{2}$

Bu rakamlar ve işaretler sistemi ile kontrol için uygun olan G 'nin alt scriptlerinde birçok ilişki vardır. Alt scriptlerin toplamı sistemin derecesidir ve ilk ikinin farkı $\omega_1(\omega_2)$ harmoniğiyle birleştirilir. Buna rağmen $M, N \geq 0$ olduğunu varsaydım, terim $e^{-i[M\omega_1+N\omega_2]t}$ 'nin katsayısını elde etmek için her G 'deki her frekans uyumsuzluğunun işaretini basitçe değiştirin.

Tabii ki, $e^{-i[M\omega_1+N\omega_2]t}$ 'nin katsayısı (40)'ı kullanan simetrik transfer fonksiyonu $H_{sym}(s_1, \dots, s_n)$ 'nin terimlerinde direkt olarak belirtilir. Bu transfer fonksiyonunun argumentleri için katlanmış bir rakamları kullanımını verir,

$$\sum_{m_2=0}^n \sum_{m_4=0}^n \frac{n! A_1^{2m_2+M} A_2^{2m_4+N}}{(m_2+M)! m_2! (m_4+N)! m_4!} H_{nsym}(\underbrace{i\omega_1}_{m_2+M}; \underbrace{-i\omega_1}_{m_2}; \underbrace{i\omega_2}_{m_4+N}; \underbrace{-i\omega_2}_{m_4}) \quad (43)$$

$m_2+m_4=\frac{n-M-N}{2}$

(42)'deki gibi (43)'te kullanılan aynı kural M ve/veya N negatif olduğu zaman katsayıyı bulur. Şunu belirtmeliyim ki frekans terimleri $e^{i[M\omega_1+N\omega_2]t}$ farklı olmamalı. Örneğin, eğer $\omega_1 = 2\omega_2$), sonra $[\omega_1 + \omega_2] = 2\omega_1$ ise böylece bu iki terimin katsayıları birleştirilir.

Örnek 5.4: Bir derece-5 homojen sistemin frekans bileşeni $e^{i[M\omega_1+N\omega_2]t}$ 'e katkısı hesaplanacak. Bu durumda (43) şunun için özelleşir:

$$\sum_{m_2=0}^5 \sum_{m_4=0}^5 \frac{5! A_1^{2m_2+1} A_2^{2m_4+2}}{(m_2+1)! m_2! (m_4+2)! m_4!} H_{5sym}(\underbrace{i\omega_1}_{m_2+1}; \underbrace{-i\omega_1}_{m_2}; \underbrace{i\omega_2}_{m_4+2}; \underbrace{-i\omega_2}_{m_4})$$

$m_2+m_4=1$

Burada özetle iki terim var, 0,1 ve 1,0 indeks çiftlerine uyumlu olmak. Böylece özet şunu verir:

$$\frac{5! A_1 A_2^4}{3!} H_{5sym}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_2, i\omega_2, -i\omega_2) + \frac{5! A_1^3 A_2^2}{2! 2!} H_{5sym}(i\omega_1, i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, i\omega_2)$$

Frekans bileşenini katsayısını hesaplamak için öğreticidir.

$$\frac{5!A_1A_2^4}{3!}H_{sym}(i\omega_1,-i\omega_2,-i\omega_2,-i\omega_2,i\omega_2) \\ + \frac{5!A_1^3A_2^2}{2!2!}H_{sym}(i\omega_1,i\omega_1,-i\omega_1,-i\omega_2,-i\omega_2)$$

(43)'ün doğru dürüst bir uygulaması dahi çalışır, buna rağmen terimler, formülün tam tipi yüzünden oluşan negatif faktöriyeller, negatif güçler ve negatif alt scriptlerle birlikte silinmeli. Özellikle, (43) M=1, N=-2 ile oluşur,

$$\sum_{m_2=0}^5 \sum_{\substack{m_4=0 \\ m_2+m_4=3}}^5 \frac{5!A_1^{2m_2+1}A_2^{2m_4-2}}{(m_2+1)!m_2!(m_4-2)!m_4!} H_{sym}\left(\underbrace{i\omega_1}_{m_2+1}; \underbrace{-i\omega_1}_{m_2}; \underbrace{i\omega_2}_{m_4-2}; \underbrace{-i\omega_2}_{m_4}\right)$$

Özete katılan indeks çiftleri: 0,3;1,2;2,1; ve 3,0'dır. Fakat son iki çift konu dışı gibi düşürülebilir böylece $e^{i[M\omega_1+N\omega_2]t}$ 'nin katsayısı şu olur;

$$\frac{5!A_1A_2^4}{3!}H_{sym}(i\omega_1,i\omega_2,-i\omega_2,-i\omega_2,-i\omega_2) \\ + \frac{5!A_1^3A_2^2}{2!2!}H_{sym}(i\omega_1,i\omega_1,-i\omega_1,-i\omega_2,-i\omega_2) \text{ ki bu erken sonuçla katılır.}$$

Polinomial yada volterra sistemler için, yeni tamamlanmış analizin hazır olarak eklenebilmesi açıktır. Sabit-durum yanıtındaki $e^{i[M\omega_1+N\omega_2]t}$ 'nin katsayısını elde etmek için, (43)'teki katsayılar n=1,2,... için birlikte eklenmiş olmalılar. Böylece, katsayı şunun gibi simetrik transfer fonksiyonlarının terimlerindeki bir volterra sistem için yazılabilir:

$$\sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_4=0}^{\infty} \frac{(2m_2+2m_4+M+N)!A}{(m_2+M)!m_2!(m_4+N)!m_4!} \\ H_{(2m_2+2m_4+M+N)_{sym}}\left(\underbrace{i\omega_1}_{m_2+M}; \underbrace{-i\omega_1}_{m_2}\right) \quad (44)$$

n alt scriptlerin toplamını ayırmakla yerine konulur ve özetlerdeki kısıtlamalar kaldırılır.

Örnek 5.5: (44)'ün kullanımının bir örneği olarak, giriş (38) için bir derece-3 polinomial sisteminin yanıtındaki terimleri listeleyeceğim. Karmaşık çekimli terimler bilgi eklemediklerinden beri ihmal edilmiş olacaklar. Derece-1 alt sisteminin katkısı (44)'deki $2m_2+2m_4+M+N=1$ sınırlamasını büyütmeyle bulunur.

Tablo 5.2

Frekans-Yanıt Terimleri: Derece-1 Alt sistem*

Özet	İndeksler	Frekans
------	-----------	---------

m_2	m_4	M	N	Term
0	0	1	0	$A_1 H_1(i\omega_1) e^{i\omega_1 t}$
0	0	0	1	$A_2 H_1(i\omega_2) e^{i\omega_2 t}$

*(artı karmaşık-çekimli frekans terimleri)

Derece-2 alt sisteminin katkısı aslında tablo 5.1 tekrarını kapsar. Fakat, rakamlar ve işaretler sonraki kontekste farklıdır, böyleki ben önden gideceğim. (44)teki $2m_2 + 2m_4 + M + N = 2$ katkıyı fazlaştırmak, tablo 5.3'teki listeyi verir. Bu durumdaki önemli dikkat edilecek şey, M ve/veya N E negatif olmaları için izin vermekle oluşan sadece bir farklı frekans parçasının olduğudur. Öyle ki bir terim önceki hesaplanmış terimlerden nasıl elde edildiğini göstermek için bir *işaret anahtarı* olarak adlandırılır.

Tablo 5.3

Frekans-Yanıt Terimleri:Derece-2 Altsistem*

Özet				İndeksler Frekans
m_2	m_4	M	N	Term
1	0	0	0	$2! A_1^2 H_{2sym}(i\omega_1, -i\omega_1)$
0	1	0	0	$2! A_2^2 H_{2sym}(i\omega_2, -i\omega_2)$
0	0	2	0	$A_1^2 H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_1) e^{i2\omega_1 t}$
0	0	0	2	$A_2^2 H_{2sym}(i\omega_2, i\omega_2) e^{i2\omega_2 t}$
0	0	1	1	$2! A_1 A_2 H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2) t}$
sign switch				$2! A_1 A_2 H_{2sym}(i\omega_1, -i\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2) t}$

Aynı biçimde, $2m_2 + 2m_4 + M + N = 3$ ayarlaması, tablo 5.4'de gösterildiği gibi derece-3 alt sisteminin katılımını verir.

Tablo 5.4 Frekans-Yanıt Terimleri:Derece-3 Altsistem

Özet İndeksler Frekans

m_2	m_4	M	N	Term
1	0	1	0	$\frac{3!}{2!} A_1^3 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_1, -i\omega_1) e^{i\omega_1 t}$
1	0	0	1	$3! A_1^2 A_2 H_{3sym}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2) e^{i\omega_1 t}$
0	1	1	0	$3! A_1 A_2^2 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2) e^{i\omega_1 t}$
0	1	0	1	$\frac{3!}{2!} A_2^3 H_{3sym}(i\omega_2, i\omega_2, -i\omega_2) e^{i\omega_2 t}$
0	0	2	1	$\frac{3!}{2!} A_1^2 A_2 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_1, i\omega_2) e^{i(2\omega_1+\omega_2)t}$
0	0	1	2	$\frac{3!}{2!} A_1 A_2^2 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_2) e^{i(\omega_1+2\omega_2)t}$
0	0	3	0	$A_1^3 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_1, i\omega_1) e^{i3\omega_1 t}$
0	0	0	3	$A_2^3 H_{3sym}(i\omega_2, i\omega_2, i\omega_2) e^{i3\omega_2 t}$
sign switch				$\frac{3!}{2!} A_1^2 A_2 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_1, -i\omega_2) e^{i(2\omega_1-\omega_2)t}$
sign switch				$\frac{3!}{2!} A_1 A_2^2 H_{3sym}(i\omega_1, -i\omega_2, -i\omega_2) e^{i(\omega_1-2\omega_2)t}$

Tabii ki, bu örneği tamamlamak için, tüm bu terimler birleştirilmeli.

2 sinüsoydal terimden daha fazlalarının toplamı olan girişleri göz önünde tutmak için, aynı yaklaşım takip edilir. Örneğin, takip eden etkenin doğruluğunu kanıtlamak sıkıcı olmasına rağmen doğrudur. Bir volterra sisteme giriş için:

$$u(t) = 2A_1 \cos(\omega_1 t) + 2A_2 \cos(\omega_2 t) + 2A_3 \cos(\omega_3 t) \quad (45)$$

Sabit-durum yanıtında $e^{i[L\omega_1 + M\omega_2 + N\omega_3]t}$, $L, M, N \geq 0$ üslüsünün katsayısı belli sayıda -titiz olmak için- transfer fonksiyonuna giren çeşitli sayıdaki düşüncelerin girildiği yerde şöyledir:

$$\sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_4=0}^{\infty} \sum_{m_6=0}^{\infty} \frac{(2m_2 + 2m_4 + 2m_6 + L + M + N)! A_1^{2m_2+L} A_2^{2m_4+M} A_3^{2m_6+N}}{(m_2 + L)! m_2! (m_4 + M)! m_4! (m_6 + N)! m_6!} H_{(2m_2+2m_4+2m_6+L+M+N)sym}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2, i\omega_3, -i\omega_3) \quad (46)$$

L, M ya da N negatif oldukları zaman, katsayı önceki gibi frekans tezlerinin karşılaştırmasının işaretini değiştirmeyeyle bulunur. Hem de önceki gibi, ω_1, ω_2 ve ω_3 düzenli değerlere dayanan frekans bileşenleri farklı olmayabilir. Şunun üzerinde durmalıyım ki, (46) karmaşık bir üslünün katsayısını verir. Böylece, toplam sabit-durum yanıtı hakkında ne söylenebilir?

5.4. Rasgele Girişler için Yanıt

Önceki bölümlerdeki gibi, genelleşmiş doğrusal teori ilk önce gözden geçirilecek. Sistem için girişin kabul edilen değer $E[u(t)]$ ve otomatik bağıntı olasılıksal işleminden gerçek örnek bir fonksiyon olduğunu varsayın

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma \quad (47)$$

$$R_{uu}(t_1, t_2) = E[u(t_1)u(t_2)] \quad (48)$$

Sonra çıkış gerçek bir olasılıksal işlemden bir örnek fonksiyondur ve çıkışın $E[y(t)]$, giriş/çıkışın, *çapraz-bağıntının*

$$R_{yu}(t_1, t_2) = E[y(t_1)u(t_2)] \quad (49)$$

ve çıkış otomatik bağıntının

$$R_{yy}(t_1, t_2) = E[y(t_1)y(t_2)] \quad (50)$$

beklenen değerini bulmakla ilgilidir,

Direk hesaplamayla olan işlem, beklentinin aşağıdakiyle bütünleşmesiyle yer değiştirilebilirliği açıktır,

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) E[u(t-\sigma)] d\sigma \quad (51)$$

Böylece,

$$y(t_1)u(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) u(t_1-\sigma) u(t_2) d\sigma$$

her iki kenardaki beklenen değerleri almak şunu verir:

$$R_{yu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) R_{uu}(t_1-\sigma, t_2) d\sigma \quad (52)$$

Benzer şekilde,

$$y(t_1)y(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1) h(\sigma_2) u(t_1-\sigma_1) u(t_2-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

ve böylece

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1) h(\sigma_2) R_{uu}(t_1-\sigma_1, t_2-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (53)$$

Şunu belirtmeliyiz ki, teknik konuların bir numarası tekrar görmezden gelinir. Örneğin, $E[u(t)]$ ve $R_{uu}(t_1, t_2)$ aşağıda gösterilen bütünleşmelere izin vermeye yeterli olarak davrandığı tam olarak farz edilir. Bu gibi etmenler doldurmak için çok zor değil ve o görev okuyucuya bırakılır, genellikle.

Bağlantı ilişkileri çok değişkenli Fourier dönüştürmenin terimlerinde sık sık belirtilir. Genel tek-değişkenli Fourier dönüşmeye tam benzerlik için

$$F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (54)$$

Bir fonksiyon $f(t_1, \dots, t_n)$ 'nin çok değişkenli Fourier dönüşmesi aşağıdakiyle tanımlanır:

$$F(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) e^{-i\omega_1 t_1} \dots e^{-i\omega_n t_n} dt_1 \dots dt_n \quad (55)$$

Tabii ki, bu sürpriz değil, bölüm 2'deki çok değişkenli Laplace dönüşmenin verilen tartışmasıdır. Bunun yanında, çok değişkenli Fourier dönüşme bölüm 2'deki Laplace dönüşmenin özelliklerinin bir gözden geçirmesi sonrasında makul olarak beklenen tüm özellikleri gösterir. Ters Fourier dönüşme şöyle verilir:

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{i\omega_1 t_1} \dots e^{i\omega_n t_n} d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (56)$$

Bu bölümün amacı için, $h(t)$ 'nin Fourier dönüşmesi *sistem fonksiyonu* diye adlandırılır ve $H(\omega)$ şeklinde yazılır. Bu genel durumda, Laplace ve Fourier dönüşme arasındaki doğal ortak çarpışmanın okuyucusuna belki hatırlatabilirim. Eğer bir (Laplace) dönüşme fonksiyonu $H(s)$ $\text{Re}[s]=0$ için oluşur, sonra sistem fonksiyonu $H(s)|_{s=i\omega} = H(i\omega)$ tarafından verilir. Laplace dönüşmenin rasgele giriş sinyalleriyle birlikte madde işleri için yana konulmasından beri, ben sistem fonksiyonu ve tüm tek- ya da çoklu – değişkenli Fourier dönüşmeler için $H(\omega)$ rakamlar ve işaretler sistemini kullanacağım. Bu arada, Fourier dönüşmenin var olmasını garantilemiş hipotezler varsayılacaktır. Örneğin, sistem sabitlik özelliğinin $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ uyması, sistem fonksiyonu $H(\omega)$ 'nin varolmasına garanti olduğu farz edilebilir.

Diğer bağıntı fonksiyonlarının dönüşümleri için aynı tanımlarla birlikte

$$S_{uu}(\omega_1, \omega_2) = F[R_{uu}(t_1, t_2)] \quad (57) \text{'e izin vermek}$$

(52) ve (53)'te gösterilen bir doğru hesaplama aşağıdakiyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega_1, \omega_2) &= H(\omega_1) S_{uu}(\omega_1, \omega_2) \\ S_{yy}(\omega_1, \omega_2) &= H(\omega_1) H(\omega_2) S_{uu}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (58)$$

Bu genel kavramlar gerçek rasgele işlem $u(t)$ 'nin sabit olduğu durumdaki en ilginçidir. Bunun için, $t = -\infty$ 'da giriş sinyalinin eklendiğinin farzetmek, çıkış dahi gerçek bir sabit rasgele işlemdir. Diğer bir deyişle, burada tam bir sabitlik farzetme var.

Sabit giriş durumunda, $E[u(t)]$ bir değişmezdir, böylece

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma E[u(t)]$$

(59)

Ayrıca, otomatik bağıntı fonksiyonu $R_{uu}(t_1, t_2)$, sadece $t_1 - t_2$ farkına dayanır. $t_2 = t, t_1 = t + \tau$ değişkenlerini değiştirmeyeyle genel rakamlar sistemini takip etmek, otomatik bağıntı $R_{uu}(t + \tau, t)$ sadece τ 'nin bir fonksiyonudur ve bundan dolayı $R_{uu}(\tau)$ şeklinde yazılır. Yeni değişkenlerin terimlerinde giriş/çıkış çapraz-bağıntıyı belirlemek için, (52) şöyle yazılabilir

$$R_{yu}(t + \tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) R_{uu}(t + \tau - \sigma, t) d\sigma$$

ve sağ tarafın t 'nin bağımsız olduğundan beri, şu şekilde yazılabilir:

$$R_{yu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) R_{uu}(\tau - \sigma) d\sigma \quad (60)$$

Benzer şekilde, çıkış otomatik bağıntı şöyle yazılabilir

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1) h(\sigma_2) R_{uu}(\tau - \sigma_1 + \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (61)$$

Bu ilişki tek-değişken Fourier dönüşümü kullanan frekans domaininde belirtilebilir. Bu kolay bir biçimde doğruca sonuçlanabilir. Aslında, sonraki gelişmeler için ısıtmak için, (58)deki 2-değişkenli Fourier dönüşüm formüllerinden olan ifadeleri belirteceğim. Aşağıda gösterilen yeni değişkenleri kullanmak,

$$\begin{aligned} S_{uu}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(t_1, t_2) e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(t + \tau, t) e^{-i\omega_1(t + \tau)} e^{-i\omega_2 t} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-i\omega_1 \tau} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} d\tau dt \end{aligned}$$

τ 'e uymakla bütünleştirme sabit rasgele işlemin *güç gerçek olmayan yoğunluk* olan Fourier dönüşüm $S_{uu}(\omega) = F[R_{uu}(\tau)]$ 'yi verir. Sonra iyi bilinen dönüşümü kullanmak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi \delta_0(\omega)$$

aşağıdakine götürür:

$$S_{uu}(\omega_1, \omega_2) = 2\pi S_{uu}(\omega_1) \delta_0(\omega_1 + \omega_2)$$

ω_2 'ye uyan iki tarafın bütünleşmesi aşağıdakini verir:

$$S_{uu}(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega_1, \omega_2) d\omega_2 \quad (62)$$

Bu formül o işlemin genel otomatik fonksiyonunun 2-değişkenli Fourier dönüşümünün bir sabit rasgele işlemin güç gerçek olmayan yoğunluğunu belirtir. Tabii ki, benzer bir ilişki (58)'de verilen $S_{yu}(\omega_1, \omega_2)$ 'nin terimlerindeki *çapraz gerçek olmayan yoğunluk* $S_{yu}(\omega_1)$ için elde edilir. Böylece (58)'deki ilk denklem aşağıdaki gibi olur:

$$S_{yu}(\omega_1, \omega_2) = 2\pi H(\omega_1) S_{uu}(\omega_1) \delta_0(\omega_1 + \omega_2)$$

böylece giri/çıkış *çapraz-gerçek olmayan yoğunluk* giriş güç gerçek olmayan yoğunluğun terimlerinde şu sayede verilir:

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi H(\omega_1) S_{uu}(\omega_1) \delta_0(\omega_1 + \omega_2) d\omega_2 \\ &= H(\omega_1) S_{uu}(\omega_1) \end{aligned} \quad (63)$$

(58)'deki ikinci ilişki için benzer bir tarzda işleme aşağıdaki giriş güç gerçek olmayan yoğunluğun terimlerindeki çıkış güç gerçek olmayan yoğunluğu şöyle verir:

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega_1) &= H(\omega_1) H(-\omega_1) S_{uu}(\omega_1) \\ &= |H(\omega_1)|^2 S_{uu}(\omega_1) \end{aligned} \quad (64)$$

Ben bu noktada belitmeliyim ki ergodik tarzları ayırma, sabit durumdaki çeşitli bağıntılar ve gerçek olmayan yoğunluk ortalama bir zamanda anlatılır. Bu gerçek teşhis teknikleri tartışıldığı zaman bölüm 7'de çok önemli olacak. Ayrıca şuna da dikkat edilmeli ki, sistem fonksiyonlarının terimlerinde, (59)'da verilen çıkışın beklenen değeri şu şekilde yazılabilir:

$$E[y(t)] = H(0) E[u(t)] \quad (65)$$

Şimdi aşağıdakiyle tanımlanmış doğrusal olmayan sistemler için gözden geçirilmiş fikirlerin genelini göz önünde tutalım:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (66)$$

Polinomial ya da Volterra sistemlerin tartışması bu homojen durum ele alınana kadar ertelenmiş olacak.

$u(t)$ gerçek bir rasgele işlem olduğu zaman, doğru hesaplama aşağıdakini verir,

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) E[u(t-\sigma_1) \dots u(t-\sigma_n)] d\sigma_1 \dots d\sigma_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) R_{uu}^{(n)}(t-\sigma_1, \dots, t-\sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n \end{aligned} \quad (67)$$

girişin n^{th} -dizi otomatik fonksiyonunun aşağıdaki tarafından tanımlandığı yerde.

$$R_{uu}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = E[u(t_1) \dots u(t_n)]$$

Benzer bir tarzda giriş/çıkış çapraz-bağıntı ve çıkış otomatik bağıntı aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$R_{yu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) R_{uu}^{(n+1)}(t_1-\sigma_1, \dots, t_1-\sigma_n, t_2) d\sigma_1 \dots d\sigma_n \quad (68)$$

$$\begin{aligned} R_{yy}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) h(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{2n}) \\ &\quad R_{uu}^{(2n)}(t_1-\sigma_1, \dots, t_1-\sigma_n, t_2-\sigma_{n+1}, \dots, t_2-\sigma_{2n}) d\sigma_1 \dots d\sigma_{2n} \end{aligned} \quad (69)$$

$n=1$ için bu ifadeler önceki tartışmalardır. Fakat $n>1$ için çıkışın beklenen değeri ve çıkış bağıntısı daha yüksek dizi giriş otomatik bağıntıya dayanır. Diğer bir deyişle, karakterize edilmeye ihtiyaç duyan daha fazla değişmeyen bilgiyi n düşürür, örneğin, çıkış otomatik bağıntısı.

(67), (68), (69) ifadeleri değişken birliklerini izleyen kat biçiminde yazılabilirler, bir biçim ki katların ve çok değişkenli Laplace dönüşümünü kullanan bir homojen sistemin giriş/çıkış işaretini göz önünde tutmakla ortaya çıkan değişken birliklerinin benzeridir. Fourier dönüşümlerin terimlerindeki (68) ve (69) ifadeleri ile ilgili olduğundan beri, bölüm 2’de yapıldığı gibi birlik görünüşünden kat görünüşünü ayırmak için uygundur. Bunu yapmak için, *çok değişkenli giriş/çıkış çapraz-bağıntı* aşağıdaki tarafından tanımlanır:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{yu}(t_1, \dots, t_{n+1}) &= \\ &\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) R_{uu}^{(n+1)}(t_1-\sigma_1, \dots, t_n-\sigma_n, t_{n+1}) d\sigma_1 \dots d\sigma_n \end{aligned} \quad (70)$$

böylece

$$R_{yu}(t_1, t_2) = \hat{R}_{yu}(t_1, \dots, t_{n+1}) \Big|_{\substack{t_1 = \dots = t_n = t_1 \\ t_{n+1} = t_2}} \quad (71)$$

Benzer şekilde, *çok değişkenli çıkış otomatik bağıntısı* şöyle tanımlanır,

$$\hat{R}_{yy}(t_1, \dots, t_{2n}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) h(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{2n}) R_{uu}^{(2n)}(t_1 - \sigma_1, \dots, t_{2n} - \sigma_{2n}) d\sigma_1 \dots d\sigma_{2n} \quad (72)$$

böylece

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \hat{R}_{yy}(t_1, \dots, t_{2n}) \left| \begin{array}{l} t_1 = \dots = t_n = t_1 \\ t_{n+1} = \dots = t_{2n} = t_2 \end{array} \right. \quad (73)$$

Bu orta çok değişkenli değerin Fourier dönüşme yolu ile simgeyi kolaylaştırmaktan başka anlamı yoktur. Çıkışın düzen-n otomatik bağıntısının Fourier dönüşmesi şöyle olsun,

$$S_{uu}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = F[R_{uu}^{(n)}(t_1, \dots, t_n)] \quad (74)$$

ve çıkışın çok değişkenli bağıntı ve otomatik bağıntısının Fourier dönüşümü şöyle olsun,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{yu}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) &= F[\hat{R}_{yu}(t_1, \dots, t_{n+1})] \\ \hat{S}_{yy}(\omega_1, \dots, \omega_{2n}) &= F[\hat{R}_{yy}(t_1, \dots, t_{2n})] \end{aligned} \quad (75)$$

bunlar çok değişkenli gerçek olmayan yoğunluklar olarak adlandırılırlar, yine de gerçek olmayan yoğunlukla yapmak için az ya da hiçbir şeyleri yoktur. Sistem fonksiyonunun terimlerinde olan Fourier dönüşmelerin kolayca kurulmuş kat özelliğini takip eder,

$$\hat{S}_{yu}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) = H(\omega_1, \dots, \omega_n) S_{uu}^{(n+1)}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \quad (76)$$

$$\hat{S}_{yy}(\omega_1, \dots, \omega_{2n}) = H(\omega_1, \dots, \omega_n) H(\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}) S_{uu}^{(2n)}(\omega_1, \dots, \omega_{2n}) \quad (77)$$

n=1 için düzeltme imleri sol taraftan kaldırılabilir ve sonra bu ifadeler (58)dekilerle birlikte katılır. Şimdiki önemli problem n>1 için çok değişkenli gerçek olmayan yoğunlukların terimlerdeki $S_{yy}(\omega_1, \omega_2)$ ve $S_{yu}(\omega_1, \omega_2)$ 'yi belirtmektir. Bu, Fourier dönüşmenin terimlerdeki (71) ve (73)deki değişken birliklerini belirtmektir. Bunu başarmak için az bir manevra alır, fakat manevralar bölüm 2'deki değişkenler formülü birliğinin ispatından bildik olmalı.

Ters Fourier dönüşme ilişkisi çok değişkenli çapraz-bağıntı için şöyle yazılabilir:

$$\hat{R}_{yu}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) e^{i\gamma_1 t_1} \dots e^{i\gamma_{n+1} t_{n+1}} d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1}$$

Şundan

$$R_{yu}(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) e^{i(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) t_1} e^{i\gamma_{n+1} t_2} d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1}$$

İki kenarın Fourier dönüşümünü almak aşağıdakini verir

$$S_{yu}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) e^{-i(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n)t_1} e^{-i(\omega_2 - \gamma_{n+1})t_2} d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1} dt_1 dt_2$$

Ve t_1 ve t_2 ye uymakla bütünleşme,

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \\ &\quad \delta_0(\omega_2 - \gamma_{n+1}) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\gamma_1, \dots, \gamma_n) S_{uu}^{(n+1)}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \\ &\quad \delta_0(\omega_2 - \gamma_{n+1}) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1} \end{aligned} \quad (78)$$

Otomatik bağıntı çıkışı için bu prosedürü tekrar etmek aşağıdakini verir

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yy}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \\ &\quad \delta_0(\omega_2 - \gamma_{n+1} - \dots - \gamma_{2n}) d\gamma_1 \dots d\gamma_{2n} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\gamma_1, \dots, \gamma_n) H(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{2n}) S_{uu}^{(2n)}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \\ &\quad \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \delta_0(\omega_2 - \gamma_{n+1} - \dots - \gamma_{2n}) d\gamma_1 \dots d\gamma_{2n} \end{aligned} \quad (79)$$

Buradaki benzerlikler bölüm 2'deki değişkenler formülleri birliği ile birlikte henüz görünmedi, fakat ben kısaca bahsedeceğim.

Gerçek hesaplamalar veya uygulamaların üzerinde düşünülüp tartışıldığı zaman çıkış gerçek olmayan yoğunluk için bu ifadeler ve çapraz-bağıntı yoğunluğunun zorlu olması ile ilgili hiç soru yok. Fakat giriş rasgele işlemi üzerindeki çok daha fazla üzerine almanın işlemiyle kolaylaştırılabilirler. Doğrusal durumdaki gibi, bunun ilk öncesi sabitlik. Bir sabit giriş $t = -\infty$ da bir sabit homojen sisteme eklendiği zaman, alışılmış ve oldukça basit zaman-değişimi tezi çıkış rasgele işlemin sabit olduğunu gösterir. Böylece, çıkış otomatik bağıntı ve giriş/çıkış çapraz-bağıntı gözden geçirilmiş teknikleri kullanan tek bir değişkenin fonksiyonları olarak belirtilebilir. Ben Problemler için bağıntıları bırakmayı ve gerçek olmayan yoğunluklar için hesaplamaları yapacağım.

Çapraz-gerçek olmayan yoğunluk için, form (62)nin bir ilişkisi yazılabilir, aşağıda verilen

$$\begin{aligned}
S_{yu}(\omega_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yu}(\omega_1, \omega_2) d\omega_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \\
&\quad \delta_0(\omega_2 - \gamma_{n+1}) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1} d\omega_2
\end{aligned} \tag{80}$$

Bütünleşme ilk ω_2 çıktılarına uymakla

$$S_{yu}(\omega_1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1} \tag{81}$$

ya da, sistem fonksiyonunun terimlerinde ve sıra n+1'in giriş gerçekte olmayan yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
S_{yu}(\omega_1) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} H(\gamma_1, \dots, \gamma_n) S_{uu}^{(n+1)}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \\
&\quad \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1}
\end{aligned} \tag{82}$$

Dikkat edilmeli ki, (82)'deki γ_1 'e uymayla bütünleşme

$$S_{yu}(\omega_1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yu}(\omega_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_n, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}) d\gamma_2 \dots d\gamma_{n+1} \tag{83}$$

bölüm 2.3'teki bir değişkenler formülü birliği gibi olan bir ifadeyi verir. Aslında, (82)'deki bütünleşmemiş form daha fazla gelişmeler için daha fazla hızlı ve verimli olacak.

Çıkış güç gerçekte olmayan yoğunluk için benzer bir hesaplama aşağıdakini verir

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{yy}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) d\gamma_1 \dots d\gamma_{2n} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\gamma_1, \dots, \gamma_n) H(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{2n}) S_{uu}^{(2n)}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \\
&\quad \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) d\gamma_1 \dots d\gamma_{2n}
\end{aligned} \tag{84}$$

Tekrar, bu bir değişkenler formülünün birliği olarak yorumlanabilir.

Daha fazla basitleşmeyi elde etmek için, gerçekte, sabit, rasgele işlem girişinin sıfır-ortalama ve Gauss dağılımı olduğu farz edilir. Bu durumda giriş işleminin daha yüksek dizi otomatik bağıntıları dizi-2 otomatik bağıntısının terimlerinde belirtilebilir. Bu etkinin kökeni verilmeyecek, daha doğrusu, ben basitçe formülleri vereceğim.

Bir sabit, sıfır-ortalama, Gauss rasgele işlemi $u(t)$ 'nin dizi-n otomatik fonksiyonu şöyle yazılabilir

$$R_{uu}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \sum_p \prod_{j,k}^n R_{uu}(t_j - t_k), & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \quad (85)$$

$\prod_{j,k}^n$ 'nin 1,2,...,n'den bir dizi tamsayı n/2 çiftlerinin üzerinde bir ürün olduğu yerde ve $\sum_p$ aşağıdaki gibi tüm ürünlerin

$$(n-1)(n-3)(n-5)\dots(1) = \frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}}$$

toplamı olduğu yerde. Daha fazla bir belirgin rakamlar ve işaretler sistemi kabul edilebildiğinde, karmaşıklıkla ki, ben (85)'i kullanacağım ve örneklerle daha fazla açıklayacağım.

Örnek 5.6 n=2 için sadece bir çift var, yani (1,2). Böylece

$$R_{uu}^{(2)}(t_1, t_2) = R_{uu}(t_1 - t_2)$$

Bu, genel dizi-2 otomatik bağıntıdır. n=4 için 3 tane 2 çift dizisi var yani, (1,2),(3,4);(1,3),(2,4) ve (1,4),(2,3). Böylece

$$R_{uu}^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4) = R_{uu}(t_1 - t_2)R_{uu}(t_3 - t_4) + R_{uu}(t_1 - t_3)R_{uu}(t_2 - t_4) + R_{uu}(t_1 - t_4)R_{uu}(t_2 - t_3) \quad (86)$$

Benzer biçimde daha yüksek sıra geçek olmayan yoğunluklar dizi-2 güç gerçek olmayan yoğunluğun terimlerinde belirtilebilir. (85)'in Fourier dönüşme n-değişkenini alma aşağıdakini verir:

$$S_{uu}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} (2\pi)^{n/2} \sum_p \prod_{j,k}^n S_{uu}(\omega_j) \delta_0(\omega_j + \omega_k), & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \quad (87)$$

Örnek 5.7 n=2 için bu formül

$$S_{uu}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = 2\pi S_{uu}(\omega_1) \delta_0(\omega_1 + \omega_2)$$

Bu bölümün başında elde edilmiş bir ifadeyi verir. N=4 için hesaplamayı bir örnekle bırakacağım ve sonucu sağlayacağım:

$$\begin{aligned}
S_{uu}^{(4)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = & (2\pi)^2 S_{uu}(\omega_1) S_{uu}(\omega_3) \delta_0(\omega_1 + \omega_2) \delta_0(\omega_3 + \omega_4) \\
& + (2\pi)^2 S_{uu}(\omega_1) S_{uu}(\omega_2) \delta_0(\omega_1 + \omega_3) \delta_0(\omega_2 + \omega_4) \\
& + (2\pi)^2 S_{uu}(\omega_1) S_{uu}(\omega_2) \delta_0(\omega_1 + \omega_4) \delta_0(\omega_2 + \omega_3)
\end{aligned} \quad (88)$$

Örnek 5.8 bu formüllerin kullanımını örneklemek için, çıkışın beklenen değeri, giriş rasgele işlemin gerçek, sabit, sıfır-ortalama, Gauss ve beyaz olduğu durum için birim yoğunluk ile hesaplanacak. Bu, $R_{uu}(\tau) = \delta_0(\tau)$ ’dir. Ayrıca, sistemin simetrik kernel ya da simetrik sistem fonksiyonlarının terimlerinde tanımlandığı farzedilecek. Bu durumda (85)in (67) nin yerine konması n tek olduğu zaman $n \geq 1$, için $E[y(t)] = 0$ ’i verir ve

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{sym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \sum_p \prod_{j,k}^n \delta_0(\sigma_k - \sigma_j) d\sigma_1 \dots d\sigma_n \\
&= \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} h_{sym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \prod_{j,k}^n \delta_0(\sigma_k - \sigma_j) d\sigma_1 \dots d\sigma_n, \quad n \text{ even}
\end{aligned}$$

Şimdi toplamın her bir teriminde n/2 impulsları tümleşik olabilir ve bu kernel’ı sadece n/2 farklı iddialarla bırakacak. Kernel’ın simetrililiği sayesinde, aynı iddialar çiftlere düzenlenebilir ve bütünleşmenin değişkenleri olduklarından beri, form h_{sym}^{****} ’de etiketlenebilirler. Bu tipin (n-1)(n-3)...(1)terimleri olacak, böylece sonuç

$$E[y(t)] = \frac{n!}{(n/2)! 2^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{sym}(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n/2}, \sigma_{n/2}) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n/2}, \quad n \text{ even}$$

(82)’yi kullanmak, çapraz-bağıntı yoğunluk ve çıkış güç gerçek olmayan yoğunluk bir gerçek, sabit, sıfır ortalama, Gauss-rasgele-işlem girişi ile simetrik transfer fonksiyonuyla tanımlanmış bir derece-n sistem için şimdi hesaplanacak. Çapraz-gerçek olmayan yoğunluk için, n+1 tek için $S_{yu}(\omega_1) = 0$ olduğu (87)den bellidir, ki bu herhangi derecenin bir homojen sistemi içindir. n+1 olduğu zaman, basit bir yerine koyma aşağıdakini verir

$$\begin{aligned}
S_{yu}(\omega_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \\
&\quad \sum_p \prod_{j,k}^{n+1} S_{uu}(\gamma_j) \delta_0(\gamma_j + \gamma_k) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \\
&\quad \prod_{j,k}^{n+1} S_{uu}(\gamma_j) \delta_0(\gamma_j + \gamma_k) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+1}
\end{aligned} \quad (89)$$

Genel durumda bu ifade üzerinde çalışmadan önce, bir örnek öğreticidir. Ve, tabii ki, doğrusal sistemler için tanımlanmış verilen n+1=2 durumu çok basittir.

Örnek 5.9 $n+1=4$ için, (89) aşağıdaki sonucu verir

$$\begin{aligned}
S_{yu}(\omega_1) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\
& S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_3) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) \delta_0(\gamma_3 + \gamma_4) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\
& S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_3) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_4) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\
& S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_4) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4
\end{aligned}$$

Bu terimlerin her birindeki γ_4 'ye uymakla bütünleşmek aşağıdakini verir

$$\begin{aligned}
S_{yu}(\omega_1) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\
& S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_3) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\
& S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\
& S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3
\end{aligned}$$

Aşağıdakini elde etmek için şimdi γ_3 'ye uymakla ilk terimi bütünleştirme, γ_2 'ye uymakla ikinci terimi bütünleştirme ve γ_1 'e uymakla üçüncü terimi bütünleştirme

$$\begin{aligned}
S_{yu}(\omega_1) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2, \omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_2) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \omega_1 - \gamma_1 - \gamma_3, \gamma_3) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\omega_1 - \gamma_1 - \gamma_3) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_3 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega_1 - \gamma_2 - \gamma_3, \gamma_2, \gamma_3) S_{uu}(\omega_1 - \gamma_2 - \gamma_3) S_{uu}(\gamma_2) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_3) d\gamma_2 d\gamma_3
\end{aligned}$$

Son olarak, ifadenin γ_2 göre integrali ve geri kalan iki ifadenin γ_3 göre integrali,

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, -\gamma_1, \omega_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\omega_1) d\gamma_1 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \omega_1, -\gamma_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\omega_1) d\gamma_1 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega_1, \gamma_2, -\gamma_2) S_{uu}(\omega_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_2 \end{aligned}$$

Ama $H_{sym}(w_1, w_2, w_3)$ simetrik olduğundan giriş/çıkış çapraz-spektral yoğunluk ifadesinin daha açık şekli,

$$S_{yu}(\omega) = \frac{3}{2\pi} S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega, \gamma, -\gamma) S_{uu}(\gamma) d\gamma \quad (90)$$

$H_{sym}(w_1, w_2, w_3)$ simetrik olduğu için bu örnekteki tüm ifade ile (89) daki ifade özdeştir. Böylece $n+1$ in çift olduğu durumda çapraz spektral yoğunluğunun genel ifadesini elde etmek için, sadece tek bir terimli ve çok sonuçlu toplamalar ile çalışmak gerekir. (1,2), (3,4), . . . , (n,n+1) çiftlerinin ayarlanmasına ilişkin ifade,

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega_1) &= \frac{n(n-2) \cdots (1)}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) S_{uu}(\gamma_1) \\ &S_{uu}(\gamma_3) \cdots S_{uu}(\gamma_n) \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) \delta_0(\gamma_3 + \gamma_4) \cdots \delta_0(\gamma_n + \gamma_{n+1}) d\gamma_1 \cdots d\gamma_{n+1} \end{aligned}$$

γ_2 ye göre daha sonra γ_4 göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega) &= \frac{n(n-2)(n-4) \cdots (1)}{(2\pi)^{(n-1)/2}} S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega, \gamma_1, -\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_2, \dots, \gamma_{\frac{n-1}{2}}, -\gamma_{\frac{n-1}{2}}) \\ &S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \cdots S_{uu}(\gamma_{\frac{n-1}{2}}) d\gamma_1 \cdots d\gamma_{\frac{n-1}{2}}, \quad n+1 \text{ even} \quad (91) \end{aligned}$$

$S_{yu}(w) = 0$ iken $n+1$ çifttir.

Gerçel, sabit, sıfır ortalamalı, gaussian girişli homojen sitemin çıkış güç spektral yoğunluğu için benzer hesaplama yapacağız. Tekrar simetrik kernel ve transfer fonksiyon ifadeleri kullanılır. (84) teki ifadeden (87) ifadesi çıkarılır ise

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) H_{sym}(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{2n}) \\ &\delta_0(\omega - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \prod_{j,k}^{2n} S_{uu}(\gamma_j) \delta_0(\gamma_j + \gamma_k) d\gamma_1 \cdots d\gamma_{2n} \quad (92) \end{aligned}$$

Ama $H_{sym}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)H_{sym}(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{2n})$ simetrik olmadığından bu durum, çapraz-spectral yoğunluğundan daha komplekstir. Böylece, farklı koşulların tipleri, toplamda ortaya çıkacak. Gerçekte, genel form $S_{yy}(w)$ için çok karışıktır. Ben, $n=2$ ve $n=3$ için sonuçları bir örnekle vereceğim.

Örnek 5.10 $n=2$ için (92) deki ifade

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(\gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_3) \\
& \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) \delta_0(\gamma_3 + \gamma_4) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(\gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \\
& \delta_0(\gamma_1 + \gamma_3) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_4) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(\gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \\
& \delta_0(\gamma_1 + \gamma_4) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4
\end{aligned}$$

Herbir ifadenin integralini γ_4 'e göre alırsak

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(\gamma_3, -\gamma_3) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_3) \\
& \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(\gamma_3, -\gamma_2) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \\
& \delta_0(\gamma_1 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(\gamma_3, -\gamma_1) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \\
& \delta_0(\gamma_2 + \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3
\end{aligned}$$

Nasıl devam etiği açık olmalı. İlk terimin γ_2 ye göre son iki terimin γ_2 ve γ_3 e göre integrali alınır

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) = & \frac{1}{2\pi} \delta_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, -\gamma_1) H_{sym}(\gamma_3, -\gamma_3) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_3 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \omega - \gamma_1) H_{sym}(-\gamma_1, -\omega + \gamma_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\omega - \gamma_1) d\gamma_1 \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, \omega - \gamma_1) H_{sym}(-\omega + \gamma_1, -\gamma_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\omega - \gamma_1) d\gamma_1
\end{aligned}$$

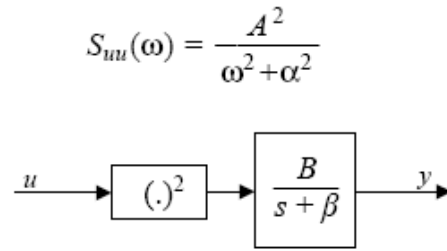
$n=2$ için sistem fonksiyonunun simetriği kullanılarak son iki terim birleştirilip çıkış güç spektral yoğunluğu ifadesi yazılırsa;

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \delta_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\gamma_1, -\gamma_1) H_{sym}(\gamma_2, -\gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega-\gamma, \gamma) H_{sym}(-\omega+\gamma, -\gamma) S_{uu}(\gamma) S_{uu}(\omega-\gamma) d\gamma
\end{aligned} \quad (93)$$

Bu örnek genel formüldeki farklı tipte oluşan ifadeleri tanımlar. Ayrıca üçüncü dereceden homojen sistemlerin sonuçlarını listeledim.

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= \frac{6}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega-\gamma_1-\gamma_2, \gamma_1, \gamma_2) H_{sym}(-\omega+\gamma_1+\gamma_2, -\gamma_1, -\gamma_2) \\
&\quad S_{uu}(\omega-\gamma_1-\gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\
&+ \frac{9}{(2\pi)^2} S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{sym}(\omega, \gamma_1, -\gamma_1) H_{sym}(-\omega, \gamma_2, -\gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2
\end{aligned} \quad (94)$$

Örnek 5.11 Şekil-5.1 sistem giriş güç spektral yoğunluklu bir gerçel, durağan, sıfır-ortalama, rastgele Gaussian işlemidir.



Şekil-5.1 2. Dereceden homojen sistemler

Çıkış güç spektral yoğunluğunu bulmak için, önce simetrik sistem fonksiyon yazılırsa;

$$H_{sym}(\omega_1, \omega_2) = \frac{B}{i\omega_1 + i\omega_2 + \beta}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \delta_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{\beta^2} \frac{A^4}{(\gamma_1^2 + \alpha^2)(\gamma_2^2 + \alpha^2)} d\gamma_1 d\gamma_2 \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{(i\omega + \beta)(-i\omega + \beta)} \frac{A^4}{(\gamma^2 + \alpha^2)[(\omega - \gamma)^2 + \alpha^2]} d\gamma \\
&= \frac{A^4 B^2}{2\pi \beta^2} \delta_0(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 + \alpha^2} d\gamma \right]^2 + \frac{B^2 A^4 / \pi}{\omega^2 + \beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\gamma^2 + \alpha^2)[(\omega - \gamma)^2 + \alpha^2]} d\gamma
\end{aligned}$$

İntegral tabloları kullanılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 + \alpha^2} d\gamma = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\gamma^2 + \alpha^2)[(\omega - \gamma)^2 + \alpha^2]} d\gamma = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + 4\alpha^2}$$

Çıkış spektral yoğunluğunu yeniden yazacak olursak,

$$S_{yy}(\omega) = \frac{A^4 B^2 \pi}{2\alpha^2 \beta^2} \delta_0(\omega) + \frac{4\pi A^4 B^2}{(\omega^2 + \beta^2)(\omega^2 + 4\alpha^2)}$$

Şimdi, rasgele girişli Volterra ve polinomlu sistemlere bakalım. Çıkış güç spektral yoğunluğu hesaplanmasında sadece bir kaç ifade için sonuçlar verilecektir.

Kullanmak için gerekli notasyon

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (95)$$

Burada $y_n(t)$ n. Dereceden homojen ifadenin çıkışı. n ise kernel transfer fonksiyonunun derecesi. Giriş keyfi, rasgele gerçel bir fonksiyondan oluşuyor ise, giriş/çıkış çapraz-korelasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R_{yu}(t_1, t_2) = E[y(t_1)u(t_2)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[y_n(t_1)u(t_2)] = \sum_{n=1}^{\infty} R_{y_n u}(t_1, t_2) \quad (96)$$

Burada $R_{yu}(t_1, t_2)$ çapraz-korelasyonu göstermektedir. Çapraz-korelasyon ve çapraz-spektral yoğunluk ifadeleri polinomlu ve volterra sistemleri için n ile türetilmiş ifadeler toplanarak bulunur. Örneğin giriş gerçel, sıfır-ortalımalı ve gaussian is giriş/çıkış çapraz-spektral yoğunluğu;

$$S_{yu}(\omega) = S_{uu}(\omega) \sum_{odd\ n \geq 1} \frac{(n)(n-2) \cdots (1)}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n\gamma m}(\omega, \gamma_1, -\gamma_1, \dots, \gamma_{\frac{n-1}{2}}, -\gamma_{\frac{n-1}{2}}) S_{uu}(\gamma_1) \cdots S_{uu}(\gamma_{\frac{n-1}{2}}) d\gamma_1 \cdots d\gamma_{\frac{n-1}{2}} \quad (97)$$

Rastgele gerçel bir giriş durumuna dönülürse, otokorelasyonu çıkışının veya güç spektral yoğunluğunun hesaplanması daha da zorlaşır.

$$R_{yy}(t_1, t_2) = E[y(t_1)y(t_2)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E[y_n(t_1)y_m(t_2)] \quad (98)$$

Bu ifade notasyonda yazılırsa,

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} R_{y_n y_m}(t_1, t_2) \quad (99)$$

Burada $R_{ynym}(t_1, t_2) = E[y_n(t_1)y_m(t_2)]$ kısmi çıkış otokorelasyonu olarak bilinir. Bu ifadenin hesaplanması diğer hesaplamalardan biraz farklı.

Bazı hesaplamalar, kısmi çıkış otokorelasyonu verir,

$$R_{y_n y_m}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{nzym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) h_{mzym}(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+m}) \\ R_{uu}^{(n+m)}(t_1 - \sigma_1, \dots, t_1 - \sigma_n, t_2 - \sigma_{n+1}, \dots, t_2 - \sigma_{n+m}) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n+m} \quad (100)$$

Bu formun açıklamalarıyla baktığımızda, çok değişkenli kısmi çıkış oto korelasyonunun aşağıdaki şekilde tanımlanması uygundur,

$$\hat{R}_{y_n y_m}(t_1, \dots, t_{n+m}) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{nzym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) h_{mzym}(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+m}) \\ R_{uu}^{(n+m)}(t_1 - \sigma_1, \dots, t_{n+m} - \sigma_{n+m}) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n+m} \quad (101)$$

Olduğu için

$$R_{y_n y_m}(t_1, t_2) = \hat{R}_{y_n y_m}(t_1, \dots, t_{n+m}) \Big|_{\substack{t_1 = \dots = t_n = t_1 \\ t_{n+1} = \dots = t_{n+m} = t_2}} \quad (102)$$

Ayrıca, bu notasyonun avantajı fourier transformunun konvolüsyon özelliğinin direk uygulanabilmesi ve değişken associationların ayrı ayrı ele alınmasıdır.

$$S_{y_n y_m}(\omega_1, \omega_2) = F[R_{y_n y_m}(t_1, t_2)] \\ \hat{S}_{y_n y_m}(\omega_1, \dots, \omega_{n+m}) = F[\hat{R}_{y_n y_m}(t_1, \dots, t_{n+m})] \\ S_{uu}^{(n+m)}(\omega_1, \dots, \omega_{n+m}) = F[R_{uu}^{(n+m)}(t_1, \dots, t_{n+m})] \quad (103)$$

ve önceden tanımlı sitem fonksiyonları kullanılırsa

$$\hat{S}_{y_n y_m}(\omega_1, \dots, \omega_{n+m}) = H_{nzym}(\omega_1, \dots, \omega_n) H_{mzym}(\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+m}) S_{uu}^{(n+m)}(\omega_1, \dots, \omega_{n+m}) \quad (104)$$

(79) ifade tekrar türetilirse

$$S_{y_n y_m}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{y_n y_m}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+m}) \delta_0(\omega_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \delta_0(\omega_2 - \gamma_{n+1} - \dots - \gamma_{n+m}) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+m} \quad (105)$$

Bu yüzden rastgele işlem girişleri için kısmi çıkış güç spektral yoğunluğu aşağıdaki şekilde verilir.

$$S_{y_n y_m}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{y_n y_m}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+m}) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+m} \quad (106)$$

Elbette m=n durumu için bu formül (84) ifadesi ile kontrol edilebilir.

Şimdi girişin gerçel, duragan, sıfır-ortalımalı, gaussian ve güç spektral yoğunluklu $S_{uu}(w)$ olduğunu var sayalım. (106) ifadesinden (87) ve (104) ifadeleri çıkarılırsa,

$$S_{y_n y_m}(\omega) = 0, \quad n+m \text{ odd} \quad (107)$$

ve

$$S_{y_n y_m}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+m-2)/2}} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} H_{nsym}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) H_{msym}(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m}) \delta_0(\omega - \gamma_1 - \dots - \gamma_n) \prod_{j,k}^{n+m} S_{uu}(\gamma_j) \delta_0(\gamma_j + \gamma_k) d\gamma_1 \dots d\gamma_{n+m}, \quad n+m \text{ even} \quad (108)$$

Bu ifadenin çok daha açık bir formla yazılması biraz kompleks bir problemdir.

Örnek 5.12 3. Dereceden polinomlu sistem durumları için $S_{yy}(w)$ 'nin hesaplanması için $n, m=1, 2, 3$ için $S_{synm}(w)$ ifadeleri hesaplanmalıdır.

$$S_{y_1 y_2}(\omega) = S_{y_2 y_1}(\omega) = S_{y_2 y_3}(\omega) = S_{y_3 y_2}(\omega) = 0$$

$n=m=1, 2, 3$ için kısmi çıkış güç spektral yoğunlukları önceden hesaplandı ve (64), (93) ve (94) ifadeleri de verildi. $n=1$ ve $m=3$ için (108) ifadesi;

$$\begin{aligned}
S_{y_1 y_3}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\gamma_1) H_{3sym}(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1) \\
&\quad \prod_{j,k}^4 S_{uu}(\gamma_j) \delta_0(\gamma_j + \gamma_k) d\gamma_1 \cdots d\gamma_4 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\gamma_1) H_{3sym}(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_3) \\
&\quad \delta_0(\gamma_1 + \gamma_2) \delta_0(\gamma_3 + \gamma_4) d\gamma_1 \cdots d\gamma_4 \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\gamma_1) H_{3sym}(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \\
&\quad \delta_0(\gamma_1 + \gamma_3) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_4) d\gamma_1 \cdots d\gamma_4 \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\gamma_1) H_{3sym}(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \delta_0(\omega - \gamma_1) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) \\
&\quad \delta_0(\gamma_1 + \gamma_4) \delta_0(\gamma_2 + \gamma_3) d\gamma_1 \cdots d\gamma_4
\end{aligned}$$

İntegral ifadesi alınır

$$S_{y_1 y_3}(\omega) = \frac{3}{2\pi} H_1(\omega) S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(-\omega, \gamma, -\gamma) S_{uu}(\gamma) d\gamma$$

Benzer şekilde $S_{y_3 y_1}$ hesaplanabilir. Başka bir şekilde elde etmek için $S_{yy}(\omega) = S_{yy}(-\omega)$ ifadesi kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= H_1(\omega) H_1(-\omega) S_{uu}(\omega) + \frac{3}{2\pi} H_1(\omega) S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(-\omega, \gamma, -\gamma) S_{uu}(\gamma) d\gamma \\
&\quad + \frac{3}{2\pi} H_1(-\omega) S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(\omega, \gamma, -\gamma) S_{uu}(\gamma) d\gamma \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \delta_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{2sym}(\gamma_1, -\gamma_1) H_{2sym}(\gamma_2, -\gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{2sym}(\omega - \gamma, \gamma) H_{2sym}(-\omega + \gamma, -\gamma) S_{uu}(\gamma) S_{uu}(\omega - \gamma) d\gamma \\
&\quad + \frac{6}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(\omega - \gamma_1 - \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2) H_{3sym}(-\omega + \gamma_1 + \gamma_2, -\gamma_1, -\gamma_2) \\
&\quad S_{uu}(\omega - \gamma_1 - \gamma_2) S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\
&\quad + \frac{9}{(2\pi)^2} S_{uu}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(\omega, \gamma_1, -\gamma_1) H_{3sym}(-\omega, \gamma_2, -\gamma_2) \\
&\quad S_{uu}(\gamma_1) S_{uu}(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (109)
\end{aligned}$$

Örnek 5.13 Örnek 3.3 de faz kilitlemeli loop tanımlandığı için örnek 3.8 deki ilk üç simetrik transfer fonksiyonun gösterilişi,

$$H(s) = \frac{1}{s + K} , \quad H_{2sym}(s_1, s_2) = 0,$$

$$H_{3sym}(s_1, s_2, s_3) = \frac{K/6}{(s_1 + s_2 + s_3 + K)(s_1 + K)(s_2 + K)(s_3 + K)}$$

Varsayalım mesaj işareti, gerçek , durağan, sıfır-ortalama, A hasalı Beyaz Gaussian gürültülü. Böylece

$$R_{uu}(\tau) = A\delta_0(\tau) , \quad S_{uu}(\omega) = A$$

Üçüncü dereceden ifadenin içinde Hata sinyali x(t) sıfır ortalalıdır. 65 den X(t) nin 1. Dereceden bileşeni ve örnek 5.8 den 2.derece ve üçüncü derece bileşeni de ayrıca sıfır ortalamalıdır.

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= AH(\omega)H(-\omega) + \frac{3A^2}{2\pi} H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(-\omega, \gamma, -\gamma) d\gamma \\ &+ \frac{3A^2}{2\pi} H(-\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(\omega, \gamma, -\gamma) d\gamma \end{aligned}$$

Açık şekli,

$$AH(\omega)H(-\omega) = \frac{A}{\omega^2 + K^2}$$

İntegral ifadesi,

$$\begin{aligned} \frac{3A^2}{2\pi} H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_{3sym}(-\omega, \gamma, -\gamma) d\gamma &= \frac{KA^2/4\pi}{(\omega^2 + K^2)(-i\omega + K)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 + K^2} d\gamma \\ &= \frac{A^2/4}{(\omega^2 + K^2)(-i\omega + K)} \end{aligned}$$

w yerine -w konarak ikinci terimden üçüncü terim elde edildikten sonra hatanın güç spektral yoğunluğu;

$$S_{xx}(\omega) = \frac{A}{\omega^2 + K^2} + \frac{KA^2/2}{(\omega^2 + K^2)^2}$$

5.5 Wiener Orthogonal Gösterimi

Polinom veya Volterra sistemi için, çıkış gücü spektral yoğunluğu ya da öz ilinti hesaplamadaki temel zorluk, bölümsel çıkış spektral yoğunlukları ya da öz ilintilerin fazlalığıdır. Bu sebeplerden ve 7. bölümde tartışılacak olan sebeplerden dolayı, cevabın istatistiksel tanımı uyarınca mutlak diklik özelliklerine sahip olan bir seriler gösterimini göz önünde bulunduracağım. Uygun yakınsama şartları altında, bu Wiener serileri, Volterra serileri gösterimindeki terimlerin yeniden düzenlenmiş gibi gösterilebilir. Buna rağmen, bu bakış açısı şaşırtıcı olabilir ve muhtemelen bu Wiener gösteriminin farklı bir başlık olarak kabul edilmesi için en iyi bakış açısıdır.

Bu bölüm boyunca, giriş işaretinin gerçek, durağan, zero-mean bir A yoğunluklu beyaz gauss rastgele işleminden elde edilmiş basit bir fonksiyon olduğu farzedilecek. Bu ifade, yakınsama sonuçlarının olağan engellemeleriyle, sonsuz seriler şeklini alacaktır. Aslında, Wiener gösteriminin yakınsama özellikleri “square sense” olarak adlandırılır ve ortaya çıkan şartlar, Volterra seriler için olanlardan daha az kısıtlayıcı olduğunu gösterebilir. Bu sonuçlar bölüm 5.6 da incelenecek.

Bir sistem için Wiener gösterimi,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[k_n, u(t)]$$

biçimini alır.

Burada her bir Wiener operatörü $G_n[k_n, u(t)]$, simetrik bir Wiener kernel $k_n(t_1, \dots, t_n)$ tarafından belirlenmiş n-ninci dereceden bir polinom operatörüdür. Operatörün polinom derecesini belirten altsimgenin 1. Bölümdeki operatör gösteriminden çok az farklı olduğuna dikkat edin. K_n 'e bağlılık görülmektedir. Ayrıca simetrik olmasına rağmen Wiener kernel'de “sym” altsimgesi yoktur. Bu, geleneksel gösterime uymaktadır ve Wiener kernel'i simetrik Volterra serisi kernel $h_{nsym}(t_1, \dots, t_n)$ den ayırt etmeye yarar.

Düzenlenecek olan önemli koşul, aşağıdaki eşitliği sağlayan bu yeni gösterimdeki kısmi çıkış öz ilintileri olarak adlandırılabilenlerdir.

$$E[G_n[k_n, u(t+\tau)]G_m[k_m, u(t)]] = 0, \text{ for all } \tau, m \neq n$$

Elbette, bu koşul belirtildiğinde, çıkış öz ilintisi aşağıdaki şekilde verilir,

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} E[G_n[k_n, u(t+\tau)]G_n[k_n, u(t)]]$$

Wiener gösterimi yalın ve genel bir ispat ile saptanabilmesine rağmen, bir başlangıç üslubu içinde başlamak aydınlatıcı olacaktır. Yaklaşım, aşağıdaki eşitliği sağlayan n-ninci dereceden bir polinom operatörü yardımıyla $G_n[k_n, u(t)]$ 'yi bulmaktır.

$$E[G_n[k_n, u(t+\tau)]F_j[u(t)]] = 0, \text{ for all } \tau, j = 0, 1, \dots, n-1$$

Burada $F_j[u(t)]$ j-ninci dereceden herhangi bir homojen operatördür. Elbette, bu koşul n-1 ya da daha az dereceli polinom operatörüne dik $G_n[k_n, u(t)]$ yi sağlamaktadır. Aşağıdaki hesaplamalar aşığında, $F_j[u(t)]$ ye uygun simetrik kernel $j=0,1$ olduğu zaman “sym” gereksiz olması durumu dışında, $f_j \text{sym}(t_1, \dots, t_j)$ şeklinde ifade edilecektir.

Sıfırıncı dereceden Wiener operatörü basit bir biçimde $G_0[k_0, u(t)] = k_0$ şeklinde tanımlanır.

Birinci dereceden Wiener operatörü aşağıdaki formda ifade edilir.

$$G_1[k_1, u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma + k_{1,0}$$

Burada $k_1(t)$, birinci dereceden Wiener kernel, $k_{1,0}$ ise seçilmiş bir sabittir. Bu operator herhangi bir homojen operatör $F_0[u(t)] = f_0$ 'a dik olmalıdır. Şöyle ki, herhangi bir f_0 için,

$$\begin{aligned} 0 &= E[G_1[k_1, u(t+\tau)]F_0[u(t)]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0 k_1(\sigma) E[u(t+\tau-\sigma)] d\sigma + f_0 k_{1,0}, \text{ for all } \tau \end{aligned}$$

Mademki, birinci terimde beklenen değer sıfır, bu koşul $k_{1,0}=0$ için sağlanabilir. Bu, birinci dereceden Wiener operatörünü aşağıdaki biçime dönüştürür.

$$G_1[k_1, u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma$$

Kernel'lerin farklı olabilmesi dışında Wiener gösterimi Volterra serileri gösterimine benzemektedir.

Şimdi 2 inci dereceye geçelim, burada çok ilginç şeyler olmaya başlayacak. $G_2[k_2, u(t)]$ 'nin genel biçimi

$$\begin{aligned} G_2[k_2, u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2) u(t-\sigma_1) u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} k_{2,1}(\sigma_1) u(t-\sigma_1) d\sigma_1 + k_{2,0} \end{aligned} \quad (116)$$

Burada $k_2(t_1, t_2)$ simetriktir, sağlanan koşullar aşağıdadır.

$$\begin{aligned} E[G_2[k_2, u(t+\tau)]F_1[u(t)]] &= 0 \\ E[G_2[k_2, u(t+\tau)]F_0[u(t)]] &= 0 \end{aligned} \quad (117)$$

İlk koşul

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2) f_1(\sigma) E[u(t+\tau-\sigma_1)u(t+\tau-\sigma_2)u(t-\sigma)] d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} k_{2,1}(\sigma_1) f_1(\sigma) E[u(t+\tau-\sigma_1)u(t-\sigma)] d\sigma d\sigma_1 \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} k_{2,0} f_1(\sigma) E[u(t-\sigma)] d\sigma \\
&= A \int_{-\infty}^{\infty} k_{2,1}(\sigma+\tau) f_1(\sigma) d\sigma
\end{aligned}$$

ifadesini sağlar.

$f_1(t)$ ne olursa olsun $k_{2,1}(t) = 0$ olması durumunda bu koşul sağlanır. 117 deki ikinci koşul,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2) f_0 E[u(t+\tau-\sigma_1)u(t+\tau-\sigma_2)] d\sigma_1 d\sigma_2 + k_{2,0} f_0 \\
&= A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma) f_0 d\sigma + k_{2,0} f_0
\end{aligned}$$

ifadesini sağlar. Bu

$$k_{2,0} = -A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma) d\sigma$$

için sağlanır. İkinci dereceden Wiener operatörü,

$$G_2[k_2, u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2) u(t-\sigma_1) u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 - A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma) d\sigma \quad (118)$$

olur.

Bu, bir tek kernel tarafından Wiener polinom operatörlerinin nasıl sağlandığının ilk örneğidir. Ayrıca, burada kesin bir teknik varsayımın olduğuna dikkat edin yani $k_2(t_1, t_2)$ nin integrali sonludur.

Üçüncü dereceden Wiener operatörünün genel formu,

$$\begin{aligned}
G_3[k_3, u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) u(t-\sigma_1) u(t-\sigma_2) u(t-\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,2}(\sigma_1, \sigma_2) u(t-\sigma_1) u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,1}(\sigma_1) u(t-\sigma_1) d\sigma_1 + k_{3,0}
\end{aligned} \quad (119)$$

biçimindedir.

Burada üçüncü dereceden Wiener kernel $k_3(t_1, t_2, t_3)$ simetriktir. Bütün f_0 lar için

$$A \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,2}(\sigma, \sigma) f_0 d\sigma + k_{3,0} f_0 = 0$$

eşitliğini sağlanmalıdır. Bu koşulu sağlamak için,

$$k_{3,0} = -A \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,2}(\sigma, \sigma) d\sigma$$

olmalıdır.

Birinci dereceden homojen operatör için diklik

$$0 = 3A^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma_1, \sigma_1, \sigma + \tau) f_1(\sigma) d\sigma_1 d\sigma + A \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,1}(\sigma + \tau) f_1(\sigma) d\sigma$$

eşitliğini sağlar.

Bu koşulu sağlamak için,

$$k_{3,1}(t) = -3A \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma, \sigma, t) d\sigma$$

olmalıdır.

Şimdiye kadar üçüncü dereceden Wiener operatörünün,

$$\begin{aligned} G_3[k_3, u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2) u(t - \sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,2}(\sigma_1, \sigma_2) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &- 3A \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma_1, \sigma_1, \sigma) u(t - \sigma) d\sigma_1 d\sigma - A \int_{-\infty}^{\infty} k_{3,2}(\sigma, \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (120)$$

eşitliği üzerinde duruldu.

Bütün ikinci dereceden homojen operatörlere dik olan eşitlik (120) koşulunu empoze etmek bizi $k_{3,2}(t_1, t_2) = 0$ seçimine götürür. Böylece (110) eşitliğinde verilen üçüncü dereceden Wiener operatörü,

$$G_3[k_3, u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) u(t-\sigma_1) u(t-\sigma_2) u(t-\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\ - 3A \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\sigma_1, \sigma_1, \sigma) u(t-\sigma) d\sigma_1 d\sigma \quad (121)$$

olur.

Genel sonuç aşağıdakiler gibi ifade edilebilir.

Teorem 5.1 n inci dereceden Wiener operatörü,

$$G_n[k_n, u(t)] = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i n! A^i}{2^i (n-2i)! i!} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) \\ d\tau_1 \cdots d\tau_i u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_{n-2i}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2i} \quad (122)$$

biçiminde ifade edilir.

Burada $[n/2]$, $n/2$ den küçük ya da eşit en büyük sayıyı göstermektedir. Wiener kernel $kn(t_1, \dots, t_n)$ simetriktir. A; gerçek, durağan, sıfır ortalamalı ve Beyaz-Gaussian gürültü girişinin şiddetidir.

İspat: n ; çift tamsayıdır. n tek sayı içinde kanıt benzerdir. Kareli parantezin karesi toplamının üst limit işaretinden silinebilir. Ayrıca notasyonu kaldırarak $F_j[u(t)]$ gelişi güzel homojen operatör değeri j ile birlikte simetrik kernel için

$$E[G_n[k_n, u(t+\tau)]F_j[u(t)]] = 0, \quad \text{odd } j < n$$

Bunun sebebi tüm terimler, gaussian rastgele değişken modeli ürününün beklenen tek sayı değerini içermesi. Böylece bu kalanları göstermektedir.

$$E[G_n[k_n, u(t+\tau)]F_{2j}[u(t)]] = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2}$$

$E[G_n[k_n, u(t)]] = 0$, $n > 0$ için bu şartlar indirgenmesini gösterir. Direkt hesaplama (85) te bize şunu verir.

$$E[G_n[k_n, u(t)]] = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i n! A^i}{2^i (n-2i)! i!} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) \\ d\tau_1 \cdots d\tau_i A^{(n-2i)/2} \sum_p \prod_{j,k}^{n-2i} \delta_0(\sigma_j - \sigma_k) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2i}$$

Her bir sabit i için her bir ifadedeki $(n-2i)/2$ impuls'ları tümleştirilerek sonuçtaki her bir etki

Benzer sonuçlar getirecektir sebebi wiener temeli simetrisidir. Bundan dolayı (85) ten

$$\frac{(n-2i)!}{(\frac{n-2i}{2})!2^{(n-2i)/2}} = \frac{(n-2i)!}{(\frac{n}{2}-i)!2^{n/2}2^{-i}}$$

i teriminin içindeki sonucun toplamıdır. Bu yüzden değişkenlerin sınıflandırması şu şekilde yazabilirim

$$E[G_n[k_n, u(t)]] = \frac{n!A^{n/2}}{2^{n/2}} \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(\frac{n}{2}-i)!i!} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n/2}, \sigma_{n/2}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n/2}$$

Ama

$$\sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(\frac{n}{2}-i)!i!} = \frac{1}{(n/2)!} \sum_{i=0}^{n/2} (-1)^i \binom{n/2}{i} = 0$$

Bundan dolayı sonuç aşağıdaki gibidir,

$$E[G_n[k_n, u(t)]] = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

J=1 için şu göstermeli, n > 2 varsayılmalıdır.

$$E[G_n[k_n, u(t+\tau)]F_2[u(t)]] = 0$$

Burada F2[u(t)] 2. Dereceden operatör keyfidir. Hesaplamalar tekrar yapılırsa,

$$\begin{aligned} E[G_n[k_n, u(t+\tau)]F_2[u(t)]] &= \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i n!A^i}{2^i(n-2i)!i!} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) \\ &\quad d\tau_1 \cdots d\tau_i f_{2sym}(\sigma_{n-2i+1}, \sigma_{n-2i+2}) E[u(t+\tau-\sigma_1) \\ &\quad \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-2i})u(t-\sigma_{n-2i+1})u(t-\sigma_{n-2i+2})] d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2i+2} \\ &= \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i n!A^i}{(n-2i)!i!2^i} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i \\ &\quad f_{2sym}(\sigma_{n-2i+1}, \sigma_{n-2i+2}) A^{(n-2i+2)/2} \sum_p \prod_{j,k}^{n-2i+2} \delta_0(\sigma_j - \sigma_k) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2i+2} \end{aligned}$$

öncelikle her bir sabit i için türetilmiş terimleri $\sum_p$ içinde dikkate almak gerekir. Bu etkiyi entegre etmek her bir terimde bize özdeş bir sonuç vermektedir.

$$\frac{(n-2i)!}{(\frac{n-2i}{2})!2^{(n-2i)/2}} = \frac{(n-2i)!}{(\frac{n}{2}-i)!2^{n/2}2^{-i}}$$

$(n-2i)/2$ ürünleri $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}$ den argüman çiftlerine sahip olacaktır. Böylece bu terim şunu verir.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i n! A^{(n+2)/2}}{(\frac{n}{2}-i)! i! 2^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i \\ & f_{2sym}(\sigma_{n-2i+1}, \sigma_{n-2i+1}) \sum_p \prod_{j,k}^{n-2i} \delta_0(\sigma_j - \sigma_k) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2i+1} \\ & = \frac{n! A^{(n+2)/2}}{2^{n/2}} \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(\frac{n}{2}-i)! i!} \int_{-\infty}^{\infty} f_{2sym}(\sigma_{n-2i+1}, \sigma_{n-2i+1}) d\sigma_{n-2i+1} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n/2}, \sigma_{n/2}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n/2} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Tekrar belirtmem gerekir ki asıl bulgular henüz kullanılmıştır. Bütün terimlerin (formüllerin, eşitliklerin) kümesi (takımı) grup içindedir.

$$\sum_p \prod_{j,k}^{n-2i+2} \delta_0(\sigma_j - \sigma_k)$$

şöyle ki $\delta_0(\sigma_{n-2i+1} - \sigma_{n-2i+2})$ form'unun impuls'ı şöyle yazılabilir.

$$\delta_0(\sigma_{n-2i+1} - \sigma_{n-2i+2}) \sum_p \prod_{j,k}^{n-2i} \delta_0(\sigma_j - \sigma_k)$$

Bu sonuç devamda kullanılabilir. Şimdi (Burada), her sabit i için takip eden terimleri, (formüller, eşitlikler) dikkate almalıyız Bu terimlerin hepsi $j, k \leq n-2i$ için form $\delta_0(\sigma_j - \sigma_{n-2i+1}) \delta_0(\sigma_k - \sigma_{n-2i+2})$ 'nın etkenlerini içerir. Bu ifade $n < n/2$ için,

$$\frac{(n-2i+2)!}{(\frac{n-2i+2}{2})! 2^{(n-2i+2)/2}} - \frac{(n-2i)!}{(\frac{n}{2}-i)! 2^{(n-2i)/2}} = \frac{(n-2i)!}{(\frac{n}{2}-i)! 2^{n/2} 2^{-i}} (n-2i)$$

i 'nin her terimi için böyledir. Simetriden dolayı, impuls'ların integralini aldıktan sonra tüm ifadeler özdeş(benzer) olacaktır. Böylece, bu terimler,

$$\sum_{i=0}^{n/2-1} \frac{(-1)^i n! A^{(n+2)/2} (n-2i)}{\left(\frac{n}{2}-i\right)! i! 2^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n/2}, \sigma_{n/2}) f_{2sym}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n/2} = 0$$

İfadesinden

$$\sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \begin{bmatrix} n/2 \\ i \end{bmatrix} (n-2i) = n \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \begin{bmatrix} n/2-1 \\ i \end{bmatrix} = 0$$

Genelde dikey durumu doğrulamak için j'nin daha geniş değerleri için bu tip hesaplamaları gerektireceği şimdi daha açıktır.

$G_n[k_n, u(t)]$ 'yi hesaba katmak için bazı genel özellikler vardır. Bu derece $n; n-2, \dots, 1$ (n tek) veya 0 (n çift) gibi homojen dereceleri içeren n.derece bir polinom operatörlü. Fakat tüm bu homojen terimler(eşitlikler) derece-n, simetri, Wiener kernel $k_n(t_1, \dots, t_n)$ ve A'nın girdi yoğunluk gürültüsü ile belirlenmiştir(çerçvelenmiştir). Terimin(eşitliğin) doğru olduğu (122)'deki $i=0$ eşitliği okuyucuyu yanlış anlamaya sokmasın.

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \dots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n$$

Sonuç olarak, seziyi teknik olarak oluşturmak için Wiener Kernel'deki bilinen bütünleşik şartları elde tutmanın gerekliliği açıktır.

Şimdi (111)deki Wiener sunumunda tanımlanan bir sistem varsayalım. Böylece dikey özellikle çıktı oto korelasyonu

$$R_{yy}(\tau) = E[y(t+\tau)y(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} E[G_n[k_n, u(t+\tau)]G_n[k_n, u(t)]] \quad (123)$$

Genel terimi hesaplamadan önce, ilk bir kaçını çözmek öğretici olacaktır. $n=0$ için açıktır ki;

$$E[G_0[k_0, u(t+\tau)]G_0[k_0, u(t)]] = E[k_0^2] = k_0^2 \quad (124)$$

$n=1$ için hesaplama sadece biraz karışıktır çünkü bu genel lineer durumdur.

$$\begin{aligned} E[G_1[k_1, u(t+\tau)]G_1[k_1, u(t)]] &= \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma_1)k_1(\sigma_2)E[u(t+\tau-\sigma_1)u(t-\sigma_2)] d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma+\tau)k_1(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (125)$$

Tüm daha önce en azından bir kez yapılmasına rağmen n=2 için hesaplama biraz daha önemlidir,

$$\begin{aligned}
& G_2[k_2, u(t+\tau)]G_2[k_2, u(t)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2)k_2(\sigma_3, \sigma_4)E[u(t+\tau-\sigma_1)u(t+\tau-\sigma_2)u(t-\sigma_3)u(t-\sigma_4)]d\sigma_1 \cdots d\sigma_4 \\
&\quad - A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2)E[u(t+\tau-\sigma_1)u(t+\tau-\sigma_2)]d\sigma_1 d\sigma_2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma)d\sigma \\
&\quad - A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2)E[u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)]d\sigma_1 d\sigma_2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma)d\sigma \\
&\quad + A^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma)d\sigma \right]^2
\end{aligned} \tag{126}$$

Hedeflerin artmasıyla, kolaylıkla doğrulanmış sonuçlar (veya sonucu kolaylıkla doğrulayan) hesaba katılmayarak terimlerin hesaba katılmaz.

$$E[G_2[k_2, u(t+\tau)]G_2[k_2, u(t)]] = 2A^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1+\tau, \sigma_2+\tau)k_2(\sigma_1, \sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{127}$$

Genel sonuç çok biçimsel olarak sunulmuş olacaktır.

Teorem 5.2 Wiener polinom operatörü $G_n[k_n, u(t)]$ için (burada $u(t)$ gerçekte, sabit (durağan), sıfır ortalamalı, A 'daki beyaz gürültü yoğunluklu Gaussian)

$$E[G_n[k_n, u(t+\tau)]G_n[k_n, u(t)]] = n!A^n \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1+\tau, \dots, \sigma_n+\tau)k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \tag{128}$$

İspat : Yazımı basitleştirmek için, Wiener operatör derece-n'i aşağıda gösterilen genel polinom formunda yazılabilir. Burada sadece n'nin $G_n[k_n, u(t)]$ 'dan oluştuğu derece ile aynı pariteye sahip homojen terimleri hatırlayın.

$$G_n[k_n, u(t)] = \sum_{\substack{k=0 \\ p(k)=p(n)}}^n g_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k)u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_k)d\sigma_1 \cdots d\sigma_k$$

Daha sonra dikey özellik kullanılır (kullanılarak)

$$\begin{aligned}
& E[G_n[k_n, u(t+\tau)]G_n[k_n, u(t)]] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t+\tau-\sigma_1) \cdots u(t+\tau-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n G_n[k_n, u(t)]\right] \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ p(k)=p(n)}}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) g_k(\tau_1, \dots, \tau_k) E[u(t+\tau-\sigma_1) \\
&\quad \cdots u(t+\tau-\sigma_n) u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k)] d\sigma_1 \cdots d\sigma_n d\tau_1 \cdots d\tau_k \quad (129)
\end{aligned}$$

K^{th} beklenen değer $(n+k)/2$ impuls'larının toplamını içerecektir ve her impuls'ların argümanı $(t+\tau-\sigma_1), \dots, (t+\tau-\sigma_n), (t-\tau_1), \dots, (t-\tau_k)$.'dan seçilen argüman çiftlerinden farklılık gösterecektir. Öncelikle $K = n$ özellikle bu beklenen terimlerin değerinin her tepkide σ_i değişkenlerinin bir parçası olduğunu ve argümanında τ_i değişkenlerinden biri olduğunu dikkate alın. Umulan değerde $n!$ gibi ürünler olacaktır, burada n σ_i değişkeni ile çift oluşturması için τ_i den, $n-1$ ikinci σ_i değişkeni ile çift oluşturması için τ_i den seçilir ve böyle devam eder. Böylece bu durumda ürün sıralanmamış çiftlere geçer, burada σ_i 'nin sırası önemsizdir. $g_n(t_1, \dots, t_n)$ simetrik olduğu sürece, impuls'lar bütünleşik değilken sonuç terimleri benzer olacaktır. Böylece $k = n$ teriminin katkısının payı şöyle yazılabilir:

$$n! A^n \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1+\tau, \dots, \sigma_n+\tau) g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n$$

Elbette, orijinal gösterimde bu tam olarak (128) dir, ve ispatın kalan kısmı, (129) daki diğer bütün ifadelerin sıfır olduğunu gösterilmesine bağlıdır. $k=n$ olduğu durumdaki impulsların kalan sonuçları en az σ_i nin 2 farklı değerlerinden oluşan kalanlı bir impuls içerecektir. Bu nitelime (129) daki bütün $k < n$ ifadesi için geçerlidir.

$$A \delta_0(\sigma_{n-1}-\sigma_n) E[u(t+\tau-\sigma_1) \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-2}) u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k)]$$

(129) daki her bir k değerleri için terimler toplanır σ_n e göre integral alınırsa ve $G_n[k_n, u(t)]$ 'nin ortoganel özellikleri ile

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k=0 \\ p(k)=p(n)}}^n A \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}) g_k(\tau_1, \dots, \tau_k) E[u(t+\tau-\sigma_1) \\
&\quad \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-2}) u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k)] d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1} d\tau_1 \cdots d\tau_k \\
&= A E\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}) u(t+\tau-\sigma_1) \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-2}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1} \right. \\
&\quad \left. \sum_{\substack{k=0 \\ p(k)=p(n)}}^n g_k(\tau_1, \dots, \tau_k) u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k) d\tau_1 \cdots d\tau_k \right] \\
&= A E\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}) d\sigma_{n-1} u(t+\tau-\sigma_1) \right. \\
&\quad \left. \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-2}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2} G_n[k_n, u(t)]\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Şimdi (129) k sabiti için, $\delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2})$ faktörünü içeren $\delta_0(\sigma_{n-1}-\sigma_n)$ faktörünü içermeyen beklenen değerdeki her bir impuls ifadesini dikkate alıcaz. $\delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2})$ formunu bir faktörünü içeren toplam ifade eksi . $\delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2}) \delta_0(\sigma_{n-1}-\sigma_n)$ formunun bir faktörü yazılabilir.

$$A \delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2}) E [u(t+\tau-\sigma_1) \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-4})u(t+\tau-\sigma_{n-1})u(t+\tau-\sigma_n) \\ u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k)] - A^2 \delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2}) \delta_0(\sigma_{n-1}-\sigma_n) E [u(t+\tau-\sigma_1) \\ \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-4})u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k)]$$

k'nın her bir değeri için (129) daki ifadeller toplanır ve impuls faktörü integral dışına alınır

$$A \delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2}) E [u(t+\tau-\sigma_1) \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-4})u(t+\tau-\sigma_{n-1})u(t+\tau-\sigma_n)]$$

Bener şekilde geri kalan ifade

$$\sum_{\substack{k=0 \\ p(k)=p(n)}}^n -A^2 \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-4}, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}) g_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \\ E [u(t+\tau-\sigma_1) \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-4})u(t-\tau_1) \cdots u(t-\tau_k)] d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-4} d\tau_1 \cdots d\tau_k \\ = -A^2 E \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-4}, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}) u(t+\tau-\sigma_1) \right. \\ \left. \cdots u(t+\tau-\sigma_{n-4}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-4} G_n[k_n, u(t)] \right] \\ = 0$$

İspatın devamında ifade $\delta_0(\sigma_{n-5}-\sigma_{n-4})$ faktörünü içerirken $\delta_0(\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2})$ ya da $\delta_0(\sigma_{n-1}-\sigma_n)$ faktörlerini içermez.

$k_n(t_1, \dots, t_n)$ Wiener kernelleri ayırma için kullanılan Metotlar 7. bölümde bilinmeyen sistemler için ana başlık olacaktır. Fakat diğer bir yol bilinmeyen sitemlerin wiener kernelleri için wiener kernelleri ve volterra kernelleri arasındaki ilişkiyi tanımlamaktır. Wiener ortogonal ifadesi ve ayrıca simetrik kernel volterra serileri tarafından tanımlanmış bir sistem düşünün.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{nsym}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n) d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \quad (130)$$

Teorem 5.3

Simetrik volterra sitemi ve wiener ve dikey temsili tarafından tanımlanan bir sitem farz edelim. Daha sonra N'inci dereceden simetrik volterra aşağıdaki denklem verir.

$$h_{Nsym}(t_1, \dots, t_N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (N+2j)! A^j}{N! j! 2^j} \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2j}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \dots, \tau_1, \tau_j, \tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_j \quad (131)$$

İspat 110'dan 120'ye kadar sistem için Wiener tasarımı şudur.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n! A^m}{(n-2m)! m! 2^m} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2m}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m) d\tau_1 \cdots d\tau_m u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_{n-2m}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2m}$$

$H_{N\text{sym}}(t_1, \dots, t_N)$ için bir açıklama bulunmak isteniyorsa N 'inci dereceden tüm terimler açıklanmalıdır. Bu terimler kesinlikle $n-2m=N$ birliktedirler öncelikle N 'nin(çift,tam) olduğunu farz edelim, eğer $n-2m=N$ ise n (çift,tam) olduğu açıktır ve $n \geq N$ 'dir. Bu nedenle N 'inci dereceden terimler(winner tanımında) aşağıdaki denklemde verilir.

$$\sum_{\substack{n=N \\ n \text{ even}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-N)/2} n! A^{(n-N)/2}}{N!((n-N)/2)! 2^{(n-N)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_{\frac{n-N}{2}}, \tau_{\frac{n-N}{2}}) d\tau_1 \cdots d\tau_{\frac{n-N}{2}} u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_N) d\sigma_1 \cdots d\sigma_N$$

Bunu düzenli bir forma sokarsak, toplam indeksi $(n-N)/2$ yerine j yazarsak formül aşağıdaki gibi olur.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (N+2j)! A^j}{N! j! 2^j} \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2j}(\sigma_1, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_j, \tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_j u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_N) d\sigma_1 \cdots d\sigma_N$$

N 'nin durumu için bilinen bir değişiklikte wiener sunumunun aynı olduğudur.

Simetrik volterra kernel ifadesindeki wiener kernellerinin açıklanması messier tasktır. Takip eden ispatta kullanılan bu yaklaşım simetrik kerneller için $h_{N\text{sym}}(t_1, \dots, t_N)$, $h_{(N-2)\text{sym}}(t_1, \dots, t_N, \sigma_1, \sigma_1)$, $h_{(N-2)\text{sym}}(t_1, \dots, t_N, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2)$ dir. Wiener kernelleri bu açıklamaları kullanılarak $k_N(t_1, \dots, t_N)$ isole edilebilir.

Teorem 5.4

Volterra sisteminde (130) ve wiener dikey sisteminde (110) (122) açıklanan bir sistem farz edilin N 'inci dereceden wiener kernel ifadesi,

$$k_N(t_1, \dots, t_N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(N+2j)! A^j}{N! j! 2^j} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(N+2j)\text{sym}}(t_1, \dots, t_N, \sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_j, \sigma_j) d\sigma_1 \cdots d\sigma_j \quad (132)$$

İspat,uygunluk için

$$a(N, j) = \frac{(N+2j)! A^j}{N! j! 2^j}$$

(131) şöyle yazılabilir

$$h_{N\text{sym}}(t_1, \dots, t_N) = k_N(t_1, \dots, t_N) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a(N, j) \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2j}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_j, \tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_j$$

$k \geq 1$ için,

$$h_{(N+2k)\text{sym}}(t_1, \dots, t_N, \sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_k) = k_{N+2k}(t_1, \dots, t_N, \sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_k) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a(N+2k, j) \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2k+2j}(t_1, \dots, t_N, \sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_k, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_j, \tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_j$$

Bazı başlangıç moniplasyonları ve değişken etiketleri kullanılırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{(N+2k)\text{sym}}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_k, \tau_k) d\tau_1 \cdots d\tau_k = \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} a(N+2k, i-k) \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2i}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i$$

(132) nin sağ yanı yazılırsa tekrar

$$\begin{aligned} h_{N\text{sym}}(t_1, \dots, t_N) &+ \sum_{k=1}^{\infty} a(N, k) \int_{-\infty}^{\infty} h_{(N+2k)\text{sym}}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_k, \tau_k) d\tau_1 \cdots d\tau_k \\ &= k_N(t_1, \dots, t_N) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a(N, j) \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2j}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_j, \tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_j \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a(N, k) \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} a(N+2k, i-k) \int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2i}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i \end{aligned}$$

Formun genel terimi

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{N+2q}(t_1, \dots, t_N, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_q, \tau_q) d\tau_1 \cdots d\tau_q$$

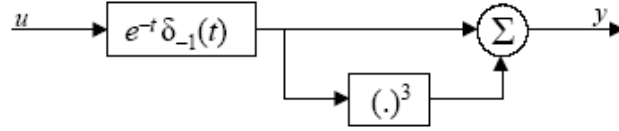
$q \geq 1$ ile birlikte eşitlik

$$(-1)^q a(N, q) + \sum_{k=1}^q (-1)^{q-k} a(N, k) a(N+2k, q-k)$$

Basit özdeşlikler kullanıldığında eşitlik 0 olur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.14

3.dereceden polinom sistemleri şekil 5.2 de gösterilmektedir.



Şekil 5.2 3.dereceden polinom sistemi

Wiener kernelleri simetrik volterra kernellerinden kolayca hesaplanılabilir.

$$h_1(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

$$h_{2sym}(t_1, t_2) = 0$$

$$h_{3sym}(t_1, t_2, t_3) = e^{-t_1} e^{-t_2} e^{-t_3} \delta_{-1}(t_1) \delta_{-1}(t_2) \delta_{-1}(t_3)$$

(132) kullanılarak, 2 sıfırsız wiener kernel ifadesi

$$k_1(t) = (1 + \frac{3A}{2})e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

$$k_3(t_1, t_2, t_3) = e^{-t_1} e^{-t_2} e^{-t_3} \delta_{-1}(t_1) \delta_{-1}(t_2) \delta_{-1}(t_3)$$

olur.

BÖLÜM 6

(W.J.RUGH)

DISCRETE-TIME SYSTEMS

SAYISAL (AYRIK) SİSTEMLER

Devamlı zamanlı sistemler için tartışılan Doğrusal olmayan sistem teorilerinin çoğu zaman bölmeli sistemler için geliştirilebilir. Farklılıklar vardır tabii ama bu farklılıklar teknik detaylarda veya sonuçların yorumundadır. Doğrusal durumlarda Tek zamanlı ve zaman bölmeli teoriler birbirine benzerdir. Bu bölümde zaman bölmeli doğrusal olmayan sistemler için volterra serileri metotlarını anlatacağım. Basitlik için sadece kararlı sistemler burada incelenecek. Zaman bölmeli ve tek zamanlı sistem teorilerinin arasındaki farka özellikle dikkat edilecektir. Ve sonuçların raporlarının çoğu okuyucuya bırakılacaktır. Ek olarak 2 yeni sistem sınıfı anlatılacaktır. Bunlar çift doğrusal giriş-çıkış sistemleri ve 2 boyutlu doğrusal sistemler. Çoklu zamanlı giriş-çıkış sistemlerinin ve çok boyutlu doğrusal sistemlerin genel sınıfları kendi hakları ile ilgilenir. Burada bu ikisinin en basit halleri heterojen sistemlerin benzer sınıflarına sunum ve analiz metotlarının benzerliği işlenmiştir.

6.1 Zaman bölgesinde Giriş-Çıkış sunumları:

Aşağıdaki formülde gösterilen Zaman bölmeli bir sistem düşünün

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{iri}(i_1, \dots, i_n) u(k-i_1) \dots u(k-i_n), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Giriş sinyali $u(k)$ çıkış sinyali $y(k)$ $k < 0$ için 0 olan gerçek dizilerdir. Çekirdek (kernel) $h(i_1, \dots, i_n)$ kadar gerçektir ve herhangi bir i_n değeri negatif ise 0'a eşittir. 1 numaralı formülde belirtilen sistemin kararlı nedensel ve n dereceli homojen olup olmadığını belirlemek basit bir işlemdir. Toplamın üst limiti en az k olabilir fakat sonsuz üst limiti formül olarak basitleştirilebilir. Herhangi bir k değeri için 1 numaralı formüldeki $y(k)$ değeri belirli bir toplamı gösterir. Teknik bir hipotez bildirmeye gerek yoktur. Başka bir değişle integrallenebilirliği ve devamlılığı tek zamanlı sistemde 1 nolu formüldeki gibi düşünülmez. Aynı zamanda direk iletim terimleri 1 nolu formülde ayrılmış olarak gösterilmiştir ve işaretsetel çekirdeği (kernel) düşünmeye gerek yoktur. Örneğin eğer formül

$$h(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 1, & i_1 = \dots = i_n = 0. \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Yukarıdaki sitem aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y(k) = u^n(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Benzer permitasyon elemanlarının toplamı gösterir ki 1 nolu formüldeki çekirdek simetrik çekirdek ile değiştirilebilir aşağıdaki gibi

$$h_{sym}(i_1, \dots, i_2) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(\cdot)} h(i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(n)})$$

Genelliği kaybolmadan (n! Permutasyonu için toplamı geri çağırır) simetrik çekirdek sunumundan üçgen çekirdek bulunabilir. Bununla birlikte biraz dikkat etmek gerekir çünkü çekirdeğin belirli argümentlerin de toplama hiçbir etkisi yoktur tek zamanlı durumlarda işaretsel olmayan çekirdeğin integralinde yapıldığı gibi. Bu üçgensel çekirdeğin değerleri üçgen şeklindeki sınır noktalarında uygun olarak artırılmalıdır. Bu artırımı yapmanın bir yolu aşağıdaki notasyonu kullanmak

$$h_{tri}(i_1, \dots, i_2) = h_{sym}(i_1, \dots, i_2) \hat{\delta}_{-1}(i_1 - i_2, i_2 - i_3, \dots, i_{n-1} - i_n)$$

Çok değişkenli adım fonksiyonu aşağıdaki gibi verildiğinde zaman.

$$\hat{\delta}_{-1}(i_1 - i_{n-1}) = \begin{cases} 0, & \text{eger } i_j < 0 \\ 1, & i_1 = \dots = i_{n-1} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{n!}{m_1! \dots m_j!}, & \begin{cases} i_1 = \dots = i_{m_1-1} = 0, \dots, \\ i_{j+1} = \dots = i_{j+m_1-1} = 0 \end{cases} \\ \cdot \\ \cdot \\ n!, & i_1, \dots, i_{n-1} > 0 \end{cases} \quad (4)$$

N=2 olduğu zaman sonuç simetrik çekirdekten üçgen çekirdeğe 3 nolu formüldeki gibi gittiği kolaylıkla belirlenir ve üçgensel çekirdekten simetrik çekirdeğe 2 nolu formül kullanılarak geçilebilir. Daha yüksek dereceli durum daha zordur ama yapılabilir. Düzeltme işaretsiz notasyonlar daha değişik adım fonksiyonlarında aşağıdaki gibi belirtilebilir.

$$\hat{\delta}_{-1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Üçüncü özel form düzenli çekirdek formudur. Formül 5 deki üçgensel eşitliğinden başlayarak

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{tri}(i_1, \dots, i_n) u(k - i_1) \dots u(k - i_n) \quad (5)$$

Bağımsız değişkenlerin üzerinde yapılan küçük bir değişiklik ile

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_n) u(k - i_1 - \dots - i_n) u(k - i_2 - \dots - i_n) \dots u(k - i_n) \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
h_{reg}(i_1, \dots, i_n) &= h_{tri}(i_1 + \dots + i_n, i_2 + \dots + i_n, \dots, i_n) \\
&= h_{sym}(i_1 + \dots + i_n, i_2 + \dots + i_n, \dots, i_n) \hat{\delta}_{-1}(i_1, \dots, i_{n-1})
\end{aligned} \tag{7}$$

Formül 7 nin geçerli olduğu koşullarda formül 6 daki genel toplam eşitliği elde edilir.

Formül 5 ve formül 6 daki genel toplam eşitliklerinin üst limitlerinin sonsuza kadar değil de sonlu bir değerle de bitirilebileceği görülmektedir. Fakat bu formülü daha da karmaşık hale getirmektedir ve bundan dolayı da tek zamanlı safhalarda olduğu gibi sonsuz üst limit kullanılır.

Sadece sabit sistemlerin sonlu değerlerle bitirildiği düşünüldüğünde

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k h(k, i_1, \dots, i_n) u(i_1) \dots u(i_n) \tag{8}$$

deki genel toplam eşitliği ortaya çıkacaktır. Tek zamanlı safha ve bir çekirdek $h(k, i_1, \dots, i_n)$ sabitiyle eğer

$$h(0, i_1 - k, \dots, i_n - k) = h(k, i_1, \dots, i_n) \tag{9}$$

ve bu ilişkinin geçerli olması durumunda

$$g(i_1, \dots, i_n) = h(0, -i_1, \dots, -i_n) \tag{10}$$

da ki eşitliğin yerine konması ile

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k g(k - i_1, \dots, k - i_n) u(i_1) \dots u(i_n) \tag{11}$$

deki genel toplam eşitliği elde edilecektir.

Bu eşitlik formül 8 daki genel toplam eşitliği ile aynıdır. Çünkü;

$$g(k - i_1, \dots, k - i_n) = h(0, i_1 - k, \dots, i_n - k) = h(k, i_1, \dots, i_n) \tag{12}$$

Değişkenler üzerinde basit bir değişiklik yaparak formül 11 yeniden yazarsak

$$y(k) = \sum_{j_1=0}^k \dots \sum_{j_n=0}^k g(j_1, \dots, j_n) u(k - j_1) \dots u(k - j_n) \tag{13}$$

deki genel toplam eşitliği elde edilir. Bu formül 1 daki formülle aynıdır.

Elimizdeki bu ana eşitliklere bağlı olarak, polinom ve volterra sistemlerinin tanımlaması homojen terimlerin sonlu ve sonsuz toplamlarından başka bir şey değildir. Elbette volterra sistemleri için kovaryans konusu önem arz etmektedir, fakat tek zamanlı safhadaki kovaryans olan temel yaklaşım bu sorunu doğrudan halletmektedir. Zaman bölmeli homojen, polinom ya da volterra sistemlerinin karşılıklı bağlantıları, gelişmelerin bölüm 1.4 den kolayca uyarlanabilmesinden dolayı burada ele alınmayacaktır.

6.2 Dönüşüm alanındaki Girdi-Çıktı Formülasyonları

Sıfırdan başlayıp negatif yönde olan n değişkenli $f = (i_1, \dots, i_n)$ tek taraflı fonksiyonun z dönüşümü formül 14 de tanımlanmıştır

$$\begin{aligned} F(z_1, \dots, z_n) &= Z[f(i_1, \dots, i_n)] \\ &= \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k f(i_1, \dots, i_n) z_1^{-i_1} \dots z_n^{-i_n} \end{aligned} \quad (14)$$

Bu kovaryans şartlarının dahil edilmesi zorunlu olan karışık değişkenlerin $z_1, \dots, z_n$ pozitif olmayan bir kuvvet serileri olarak görülebilir. Ancak, burada düşünülecek fonksiyonlar için (Zaman bölmeli doğrusal sistem teorisinde düşünülen tipik fonksiyonlar için olduğu gibi) kovaryans bölgesi daima mevcuttur. Bu nedenle de konuyu dikkatle inceleyeceğiz. Aslında formül 14, kovaryansın olmaması durumunda n bilinmeyenlerinin cebirsel bir objesi (biçimsel serisi) gibi görünmektedir. Böyleyken, beklide daha teferruatlı olan bakış açısı çoğu sonuçları tartışılacak model kurmak için kullanılabilir. Biz burada daha klasik yoruma bağlı kalacağız.

Örnek 6.1 : Örnek 2.1 i hatırlayarak λ 'nın sabit olduğu

$$f(i_1, i_2) = i_1 - i_1 \lambda^{-i_2}, \quad i_1, i_2 \geq 0$$

Fonksiyonu nu düşünün bu fonksiyonun z dönüşümü şu şekildedir.

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} (i_1 - i_1 \lambda^{-i_2}) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} - \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 \lambda^{-i_2} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \\ &= \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} i_1 z_1^{-i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{\infty} z_2^{-i_2} \right) - \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} i_1 z_1^{-i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{\infty} \lambda^{-i_2} z_2^{-i_2} \right) \end{aligned}$$

her bir sonsuz seriyi toplarsak (yada tek değişkenli z dönüşümü ele alınarak)

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= \frac{z_1}{(z_1 - 1)} \frac{z_2}{z_2 - 1} - \frac{z_1}{(z_1 - 1)^2} \frac{z_2}{z_2 - \lambda} \\ &= \frac{(1 - \lambda) z_1 z_2}{(z_1 - 1)^2 (z_2 - 1) (z_2 - \lambda)} \end{aligned}$$

haline gelir.

Formül 14 deki tanıma dikkatli bir bakış açısı ve örnek 6.1 deki hesaplamalar z dönüşümünün birkaç özelliğini ortaya çıkarmaktadır. Bu özellikler Laplace dönüşümünün taşıdığı özelliklere doğal olarak çok benzemekte olup aşağıda sunulmuştur. Ve bu özelliklerin genel kanıtları kolaydır. Tüm fonksiyonlar tek taraflı olarak varsayılmış ve büyük harfli tanımlamalar z dönüşümü olarak ele alınmıştır.

Teorem 6.1 Z dönüşü doğrusaldır :

$$\begin{aligned} Z[f(i_1, \dots, i_n) + g(i_1, \dots, i_n)] &= F(z_1, \dots, z_n) + G(z_1, \dots, z_n) \\ Z[\alpha f(i_1, \dots, i_n)] &= \alpha F(z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \quad (15)$$

Teorem 6.2 Eğer $f = (i_1, \dots, i_n)$ iki çarpanın çarpanı olarak

$$f(i_1, \dots, i_n) = h(i_1, \dots, i_k)g(i_{k+1}, \dots, i_n) \quad (16)$$

Yazılabilirse o zaman

$$F(z_1, \dots, z_n) = H(z_1, \dots, z_k)G(z_{k+1}, \dots, z_n) \quad (17)$$

Olur.

Teorem 6.3 Eğer $f = (i_1, \dots, i_n)$ tek değişkenin katı olarak

$$f(i_1, \dots, i_n) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)g(i_1 - j, \dots, i_n - j) \quad (18)$$

Verilirse o zaman

$$F(z_1, \dots, z_n) = H(z_1, \dots, z_n)G(z_1, \dots, z_n) \quad (19)$$

Olur.

Teorem 6.4 Eğer $f = (i_1, \dots, i_n)$ n katlı (üslü) olarak

$$f(i_1, \dots, i_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \dots \sum_{j=n}^{\infty} \gamma(j_1, \dots, j_n)g(i_1 - j_1, \dots, i_n - j_n) \quad (20)$$

Verilirse o zaman

$$F(z_1, \dots, z_n) = H(z_1, \dots, z_n)G(z_1, \dots, z_n) \quad (21)$$

Olur.

Teorem 6.5 Eğer $i_1, \dots, i_n$ pozitif tam sayılar ise

$$Z[f(i_1 - I_1, \dots, i_n - I_n)] = z_1^{-I_1} \dots z_n^{-I_n} F(z_1, \dots, z_n) \quad (22)$$

Z dönüşümünün tersi için temel formül çok değişkenli bir tam sayı şeklindedir.

$$f(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\tau_n} \dots \int_{\tau_1} F(z_1, \dots, z_n) z_1^{i_1-1} \dots z_n^{i_n-1} dz_1 \dots dz_n \quad (23)$$

Her Γ_j nin Z_j karışık düzlemindeki uygun bir çevre çizgisi olması durumunda açıkça görülen nedenlerle bu formül kullanılması zor bir formüldür. Bir alternatif yaklaşım ise $f = (i_1, \dots, i_n)$ fonksiyonun değeri olan $z_1, \dots, z_n$ nin negatif kuvvetindeki $F = (z_1, \dots, z_n)$ fonksiyonun genişleme katsayılarının elde edilmesidir. Eğer $F = (z_1, \dots, z_n)$ rasyonel bir fonksiyon ise bu genişleme katsayıları polinom payının polinom paydasına bölünmesi ile bulunur. Fakat bu işlem için biraz dikkatli olmak gerekir çünkü her rasyonel fonksiyon bir z dönüşüm benzemez. Bu fark ise bir z dönüşümünün negatif kuvvet serilerine karşılık gelme zorunluluğundan oluşmaktadır. İhtiyaç duyulan rasyonel fonksiyonun uygun ya da kesinlikle uygun olması bir çözüm değildir.

Örnek 6.2 Rasyonel fonksiyon

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1 + z_2}$$

Bir z dönüşüm değil çünkü bölme sonucu

$$\frac{1}{z_1 + z_2} = z_1^{-1} - z_1^{-1} \cdot z_2 + z_1^{-3} z_2^2 - \dots$$

Ya da

$$\frac{1}{z_1 + z_2} = z_2^{-1} - z_1 \cdot z_2^{-2} + z_1^2 z_2^{-3} - \dots$$

Ortaya çıkar ve her ikisi de negatif kuvvet serisi şeklinde yazılamamaktadır. Diğer yönden

$$F(z_1, z_2) = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_2 - 1}$$

Bir z dönüşümüdür, çünkü negatif kuvvet serisi şeklindedir.

$$F(z_1, z_2) = 1 + z_1^{-1} z_2^{-1} + z_1^{-2} z_2^{-2} + \dots$$

İlgili fonksiyon şu şekilde yazılabilir.

$$f(i_1, i_2) = \begin{cases} 1, & i_1 = i_2 = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Tak zamanlı safhada kullanılan Laplace dönüşü gibi z dönüşümü de n dereceli homojen sistemde aynı şekilde kullanılabilir. Bir n dereceli homojen zaman bölmeli sistem için dönüşüm fonksiyonu sistem çekirdeğinin bir z dönüşümü olarak tanımlanır. Örneğin simetrik dönüşüm fonksiyonu

$$H_{sym}(z_1, \dots, z_n) = Z[h_{sym}(i_1, \dots, i_n)] \quad (24)$$

Ne yazık ki her zaman beklenilmesi gereken bir ihtimalle $U(z)$, $Y(z)$ ve $H_{sym} = (z_1, \dots, z_n)$ terimlerinin form 1 deki girdi-çıkı ilişkilerini doğrudan doğruya göstermek imkansız görünmektedir. Genel yöntem olarak form 1 şu eşitlikler şeklinde yazılmalıdır.

$$y_n(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \dots \sum_{i=n}^{\infty} h_{sym}(i_1, \dots, i_n) u(k_1 - i_1) \dots u(k_n - i_n) \quad (25)$$

$$y(k) = y_n(k_1, \dots, k_n) \Big|_{k_1 = \dots = k_n = k}$$

O zaman teorem 6.4 ilk eşitliği

$$y_n(z_1, \dots, z_n) = h_{sym}(z_1, \dots, z_n) u(z_1) \dots u(z_n) \quad (26)$$

Da ki düzende yazmamızı sağlarken 2. eşitlik

$$Y(z) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_{n-1}} \frac{Y_n(z_1, z_2 / z_1, \dots, z / z_{n-1})}{z_1 \dots z_{n-1}} dz_1 \dots dz_{n-1} \quad (27)$$

De ki integrali içeren bir değişkenler ilişkisi içerisidedir.

Üçgensel transfer fonksiyonuna göre form 1 in gösterimi de aynı düzende olacaktır.

Düzenli dönüşüm fonksiyon durumunda ise formül 25 ve formül 26 doğrudan uygulanamaz. Ancak girdi işaretlerinin uygun olarak sınırlanması ile daha açık ve kesin bir formül türetilebilir. Bu sonuç teorem 2.10 ile aynı olmakla birlikte düzenli dönüşüm fonksiyonunun formu üzerinde hipoteze gerek duymayan ve tek zaman safhalıdan oldukça farklı olan bir ispat ile konuyu detaylı olarak ele alacağız.

İlk olarak form 6 da ki girdi-çıkı ifadesinin z dönüşümü için temel bir ifade kuracağız.

$$H_{i_1 \dots i_{n-1}}(z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_n) z_n^{-i_n}, i_1, \dots, i_{n-1} = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

da ki gibi tanımlanması durumunda

$$H_{reg}(z_1, \dots, z_n) = Z[h_{reg}(i_1, \dots, i_n)] \quad (28)$$

deki düzenli transfer fonksiyonu

$$H_{reg}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} H_{i_1 \dots i_{n-1}}(z_n) z_1^{-i_1} \dots z_{n-1}^{-i_{n-1}} \quad (29)$$

da ki eşitlik şeklinde yazılır.

Yardımcı Önerme 6.1: n homojen dereceli bir çıktının z dönüşüm formuna göre zaman aralıklı sistem

$$y(z) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} H_{i_1 \dots i_{n-1}}(z) \sum_{k=i_1+\dots+i_{n-1}}^{\infty} u(k-i_1-\dots-i_{n-1}) u(k-i_2-\dots-i_{n-1}) \dots u(k-i_{n-1}) u(k) z^{-k} \quad (31)$$

De ki düzende yazılabilir.

İspat: $y(k)$ nin z dönüşümü form 6 daki gibi aldığımızda

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_n) u(k-i_1-\dots-i_n) u(k-i_2-\dots-i_n) \dots u(k-i_n) u(k) z^{-k}$$

Genel toplam eşitliğinde k yerine $j = k - i_n$ indeksini koyduğumuzda

$$y(z) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} \left[\sum_{i_n=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_n) z^{-i_n} \right] \sum_{j=-i_n}^{\infty} u(j-i_1-\dots-i_{n-1}) u(j-i_2-\dots-i_{n-1}) \dots u(j-i_{n-1}) u(j) z^{-j}$$

Şimdi $u(k) = 0$ ve $k < 0$ varsayımı ile ve formül 30 ile sonuç aydınlığa kavuşur.

Bu ön kuram girdi-çıkı hesaplamalarının performansı için kullanılan değişken metotların ilişkisine bir alternatif sağlar. Daha da iyisi $y(z)$ için daha net kesin bir ifade hazır ve nazır bir girdi takımı ile elde edilmiş olur.

Teorem 6.6 : n homojen dereceli zaman bölmeli sistemin $H_{reg} = (z_1, \dots, z_n)$ şeklinde düzenli dönüşüm fonksiyonu olarak tanımlandığını varsayın ve girdinin de

$$U(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_j z}{z - \lambda_j}, \lambda_j \neq 0, j = 1, \dots, m \quad (32)$$

de verildiğini, o zaman

$$y(z) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{n-1}=0}^{\infty} a_{j_1} \dots a_{j_{n-1}} H_{reg} \left(\frac{z}{\lambda_{j_1} - \lambda_{j_{n-1}}}, \frac{z}{\lambda_{j_2} - \lambda_{j_{n-1}}}, \dots, \frac{z}{\lambda_{j_{n-1}}}, z \right) U \left(\frac{z}{\lambda_{j_1} - \lambda_{j_{n-1}}} \right) \quad (33)$$

İspat: formül 32 nin z dönüşümü açıkça girdi işaretini ifade eder.

$$U(z) = \sum_{j=1}^m a_j \lambda_j^k, k = 0, 1, \dots$$

Formül 31 de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} H_{i_1 \dots i_{n-1}}(z) \sum_{k=i_1+\dots+i_{n-1}}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^m a_j \lambda_j^{k-i_1-\dots-i_{n-1}} \right] \\ &\quad \left[\sum_{j=1}^m a_j \lambda_j^{k-i_2-\dots-i_{n-1}} \right] \dots \left[\sum_{j=n-1}^m a_{j_{n-1}} \lambda_{j_{n-1}}^k \right] z^{-k} \\ &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{\infty} a_{i_1} \dots a_{i_{n-1}} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots H_{i_1 \dots i_{n-1}}(z) \\ &\quad \sum_{j=1}^m a_j \sum_{k=i_1+\dots+i_{n-1}}^{\infty} \lambda_j^{k-i_1-\dots-i_{n-1}} \lambda_j^{k-i_2-\dots-i_{n-1}} \dots \lambda_{j_{n-1}}^{-k} \end{aligned}$$

Şimdi k dizisini yerine $r = k - i_1 - \dots - i_{n-1}$ koyarsak

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{n-1}=1}^m a_{i_1} \dots a_{i_{n-1}} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} H_{i_1 \dots i_{n-1}}(z) \left(\frac{z}{\lambda_{j_1} - \lambda_{j_{n-1}}} \right)^{-i_1} \\ &\quad \left(\frac{z}{\lambda_{j_2} - \lambda_{j_{n-1}}} \right)^{-i_2} \dots \left(\frac{z}{\lambda_{j_{n-1}}} \right)^{-i_{n-1}} \sum_{j=1}^m a_j \sum_{r=0}^m \lambda_j^r \left(\frac{z}{\lambda_{j_1} - \lambda_{j_{n-1}}} \right)^{-r} \\ &= \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{n-1}=1}^m a_{i_1} \dots a_{i_{n-1}} H_{reg} \left(\frac{z}{\lambda_{j_2} - \lambda_{j_{n-1}}}, \dots, \frac{z}{\lambda_{j_{n-1}}}, z \right) U \left(\frac{z}{\lambda_{j_1} - \lambda_{j_{n-1}}} \right) \end{aligned}$$

Elde edilir.

Teorem 6.6 genel olarak geniş bir durumu yeterli bir derecede kapsamaktadır ve görünüşte dağınık olmasına rağmen hesaplama sistemi oldukça doğrudur. Örneğin eğer $H_{reg} = (z_1, \dots, z_n)$ uygun bir rasyonel ise o zaman $Y(z)$ uygun bir rasyonel olacaktır ve kısmi kesir genişlemesi $Y(k)$ yı hesaplamak için kullanılabilecektir.

Dönüşüm uygulamalarını bitirmeden önce değişik transfer fonksiyonları arasındaki birkaç basit ilişkiyi göreceğiz. Form 7 yi kullanarak ve değişkenlerde basit bir değişiklik yaparak

$$\begin{aligned}
H_{reg}(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} H_{tri}(i_1 + \dots + i_n, i_2 + \dots + i_n, \dots, i_n) z_1^{-i_1} \dots z_n^{-i_n} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_n=0}^{\infty} H_{tri}(j_1 + \dots + j_n) z_1^{-j_1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{-j_2} \dots \left(\frac{z_n}{z_{n-1}} \right)^{-j_n} \\
&= H_{tri}(z_1, z_2 / z_1 + \dots + z_n / z_{n-1})
\end{aligned}$$

Elde ederiz. Bu ilişki kolayca tersine çevrilerek

$$H_{tri}(z_1, \dots, z_n) = H_{reg}(z_1, z_1 z_2, \dots, z_1 \dots z_n)$$

Elde edilir. Simetrik dönüşüm fonksiyonunu düşünürsek o zaman daha da karışacak form 2 ile dolaylı olarak anlatılan temel ilişki

$$H_{sym}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(.)} H_{tri}(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)})$$

O zaman formül 35 bize

$$H_{sym}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(.)} H_{reg}(z_{\pi(1)}, z_{\pi(1)} z_{\pi(2)}, \dots, z_1, \dots, z_n)$$

Verir

H_{reg} ya da H_{tri} nin H_{sym} then hesaplanması için en iyi yolun simetrik bir çekirdeğin bulunması ile başlanacağı görülmektedir. Düzenli yada üçgensel çekirdek elde etmek için form 3 ve form 7 yi kullan ve daha sonra z dönüşümünü hesapla. Bu hoş olmasa da yapılacak en iyi şeydir. Fakat basit durumlar da kullanılabilecek bazı numaralar vardır.

Örnek 6.3 n=2 durumunda

$$\begin{aligned}
H_{sym}(z_1, z_n) &= \frac{1}{2} H_{reg}(z_1, z_1 z_2) + \frac{1}{2} H_{reg}(z_2, z_1 z_2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, i_2) z_1^{-i_1} (z_1, z_2)^{-i_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, i_2) z_2^{-i_1} (z_1, z_2)^{-i_2}
\end{aligned}$$

Böylece, değişkenlerin basit bir değişimi şunu verir

$$2H_{sym}(z_1, z_2 / z_1) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, i_2) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \\ + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, i_2) z_2^{-i_1} z_2^{-(i_1+i_2)}$$

Açıkça, sağ taraftaki ilk terim $H_{reg} = (z_1, z_2)$ olurken ikinci terim z_1 'in sadece pozitif güçleri ile birlikte ilave olarak $2H_{sym} = (z_1, z_2 / z_1)$ deki her z_1 teriminin $1/2$ sini içermektedir. Böylece, $H_{reg} = (z_1, z_2)$, $2H_{sym} = (z_1, z_2 / z_1)$ 'in bölünmesi z_1 'in tüm pozitif güçlerini içeren tüm terimlerin silinmesi ve her z_1^0 teriminin $1/2$ ile çağrılması ile elde edilebilir. Özel bir durumda ;

$$H_{sym}(z_1, z_n) = \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2 - 1}$$

Değişkenlerin değiştirilmesi ve bölme sonucu

$$2H_{sym}(z_1, z_2 / z_1) = \frac{2z_2}{z_2 - 1} = 2(1 + z_2^{-1} + z_2^{-2} + \dots)$$

Daha sonra, z_1 terimlerinden oluşan tüm seriler

$$H_{reg}(z_1, z_n) = 1 + z_2^{-1} + z_2^{-2} + \dots = \frac{z_2}{z_2 - 1}$$

Elde edilir.

6.3 Durum Eşitliklerinden Girdi/Çıktı Önergelerinin Elde Edilmesi:

3. Bölümde anlatılan tüm metotlar oldukça küçük değişkenle zaman aralıklı safhaya uyarlanabilir. Bunun için birkaç sayfa doldurmaktan ziyade varyasyonel eşitlik metodunun ve Carleman doğrusallaştırma metodunun akıllıca bir kombinasyonuna konsantre olacağız ve başlangıçtaki durum eşitliklerinin genel bir takımını düşüneceğiz. Daha önce bahsedildiği gibi zaman bölmeli safhanın güzel bir özelliği itici çekirdekler sorunun ortaya çıkmamasıdır. Diğer bir ifadeyle, zaman aralıklı girdi/çıktı önermeleri doğrusal dönüşüm terimlerini içermektedir.

Ancak bu terimlerin çekirdekleri için olan genel formları epeyce zorlaştırdığını göreceksiniz. Durum eşitlikleri

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)], \quad k = 0, 1 \\ y(k) = h[x(k), u(k)] \quad (34)$$

de $x(k)$ 'nin n , x 1 ve $u(k)$ ve $y(k)$ 'nin sabit olması durumunda yapılacak değişikliklerle daha uygun hale gelecektir. Başlangıç durumunda $x(0)=0$, $f(0,0) = 0$ ve $h(0,0) = 0$ olduğu kabul edilmiştir. Bu basitlik için yapılmıştır, eğer $x(0)=x_0=0$ ve $f(x_0)=x_0$ olduğunda x_0 bir denge durumudur ve sıfır başlangıç durum formülünü elde etmek için basit bir değişken

değişimi kullanılabilir. (Eğer x_0 denge durumu değilse o zaman burada bahsedilen söz konusu problemin yeni bir biçime sokulması için daha zor hesaplamalara ihtiyaç vardır.)

Formül 34 deki son varsayım, $f(x,u)$ ve $h(x,u)$ fonksiyonları, istenilen derecede polinomal girdi/çıktı önermesini hesaplamayı sağlayan yeterli derecedeki $x=0$, $u=0$ durumundaki Taylor formülü kullanarak gösterilebilir. O zaman verilen durum eşitliği yerine

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N F_{ij} x^{(i)}(k) u^j(k), \quad F_{00} = 0 \\ y(k) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N H_{ij} x^{(i)}(k) u^j(k), \quad H_{00} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Gösterilen durum eşitliği bir yaklaşımla geçirilebilir. Standart Kronecker üretim notasyonunun kullanıldığı durumda $x^{(i)}(0) = 0$, $i=1 \dots N$ dir. Tek zamanlı safhada olduğu gibi önemli olan husus formül 35 de uyarlanan N dereceli çekirdekler ile formül 34 de uyarlanan N dereceli çekirdekler aynı olacaktır. (3.Bölümde formül 35 deki toplamaların üst limitlerin çok ciddiye alınmasının gerekli olmadığı deneyimini kazanmıştık. Formül 35 de N dereceli polinom önerimi ne katkıda bulunmayan pek çok terim vardır.)

Bir sonraki işlem formül 53 deki $x(k)$ için fark eşitliği sağlayacak $x^{(2)}(k)$, $x^{(3)}(k)$ ve bu şekilde devam eden fark eşitlikleri geliştirmek olacaktır. Eşitlik formu tek zamanlı safhadan farklı olmasına karşın, çünkü $x^{(j-1)}(k+1)$ anlamına gelen $x^{(j)}(k+1)$ ifadesini içeren üretim kuralı yoktur. Bu prensipte basit bir meseledir örneğin $x^{(2)}(k)$ için farklı bir eşitlik şu şekildedir.

$$\begin{aligned} x^2(k+1) &= x(k+1) \otimes x(k+1) \\ &= \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N F_{ij} x^{(i)}(k) u^j(k) \right] \otimes \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N F_{ij} x^{(i)}(k) u^j(k) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

Net toplamı kullanarak bu bir fark eşitlik formülüne dönüşecektir.

$$x^2(k+1) = \sum_{i,j \geq 0}^N \left[\sum_{\substack{k+q=i \\ m+n=j}}^N F_{km} \otimes F_{qn} \right] x^{(i)}(k) u^j(k) \quad (37)$$

Başlangıç durumunda $x^{(2)} = 0$ olması durumunda bu eşitlik formül 35 deki $x(k)$ için verilen fark eşitliği ile aynı formdadır ve açıkça $x^{(3)}(k)$, $x^{(4)}(k)$, ... eşitlikleri de aynı olacaktır. Şimdi küme

$$x^{\otimes}(k) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(k) \\ \vdots \\ x^{(N)}(k) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Bu state-affine (durum affinesi) olarak adlandırılan N dereceli eşitlik yaklaşımına kılavuzluk eder.

$$\begin{aligned} x^{\otimes}(k+1) &= \sum_{i=0}^{N-1} A_1 x^{\otimes}(k) u^i(k) + \sum_{i=1}^N b_1 u^i(k), \quad x^{\otimes}(0) = 0 \\ y(k) &= \sum_{i=0}^{N-1} c_1 x^{\otimes}(k) u^i(k) + \sum_{i=1}^N d_1 u^i(k) \end{aligned} \quad (39)$$

Toplamdaki üst limitler N den küçük derecenin çekirdeklerini hesaplamaya ihtiyaç duyulan terimleri içerecek şekilde seçildiği durumda elbette bu durum eşitliğinin boyutu oldukça yüksektir. Fakat genel bir türetme olarak terimlerin istenenden fazla olması sorununa karşı bu küçük bir problemdir. Çift doğrusal zaman bölmeli eşitliğin istenilen basit bir olay olduğunu hatırlayın.

Formül 39 daki state-affine fark eşitliğini çözmek için varyasyonel eşitlik metodunu kullanacağız ve şimdiki fazla Kronecker sembolünü iptal edeceğiz. İşlem $\alpha u(k)$ girdi işaretini varsaymakta, α isteğe bağlı bir gerçek sayıdır ve formun çözümü

$$x(k) = \alpha x_1(k) + \alpha^2 x_2(k) + \alpha^3 x_3(k) + \dots \quad (40)$$

Durum eşitliğinde yerine koyarak ve α nin kuvvetleri gibi katsayıları eşitlemek varyasyonel eşitlik olan formül

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_o x_1(k) + b_1 u(k), \quad x_1(0) = 0 \\ x_2(k+1) &= A_o x_2(k) + A_1 x_1(k) u(k) + b_2 u^2(k), \quad x_2(0) = 0 \\ x_3(k+1) &= A_o x_3(k) + A_1 x_2(k) u(k) + A_2 x_1(k) u^2(k) + b_3 u^3(k), \quad x_3(0) = 0 \\ &\vdots \\ x_N(k+1) &= \sum_{i=0}^{N-1} A_i x_{N-1}(k) u^i(k) + b_N u^N(k), \quad x_N(0) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Bu eşitlikler kolayca çözülebilir ve çözümü tekrar yazarsak ($k > 0$ için)

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-1-i} b_1 u(i) \\ x_2(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-1-i} [A_1 x_1(i) u(i) + b_2 u^2(i)] \\ x_3(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-1-i} [A_1 x_2(i) u(i) + A_2 x_1(i) u^2(i) + b_3 u^3(i)] \\ &\vdots \\ x_N(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-1-i} \left[\sum_{j=0}^{k-1} A_j x_{N-j}(i) u^j(i) + b_N u^N(i) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Bu tekrarlanan setlerin çözümü varyasyon eşitliği daha karmaşık bir çözüm formülü verir. İlk üç ifade aşağıda sıralanmıştır.

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-1-i} b_i u(i) \\
x_2(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} A_0^{k-1-i} A_1 A_0^{i_1-1-i_2} b_1 u(i_1) u(i_2) + A_0^{k-1-i} b_2 u^2(i_1) \\
x_3(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \sum_{i_3=0}^{i_2-1} A_0^{k-1-i} A_1 A_0^{i_1-1-i_2} A_1 A_0^{i_2-1-i_3} b_1 u(i_1) u(i_2) u(i_3) \\
&\quad + A_0^{k-1-i} A_1 A_0^{i_1-1-i_2} b_2 u(i_1) u^2(i_2) + A_0^{k-1-i} A_2 A_0^{i_1-1-i_2} b_1 u^2(i_1) u(i_2) \\
&\quad + A_0^{k-1-i} b_3 u^3(i_1)
\end{aligned} \tag{43}$$

Gerek bir sonuca varmadan önce formül 43 deki ilk iki çözüm ifadesini düzenli bir forma dönüştürmek uygun olacaktır. Elbette $x_1(k)$ için çekirdek vektörü düzenli bir formda tanımlamak kolaydır.

$$x_1(k) = \sum_{i_1=1}^k A_0^{i_1-1} b_{i_1} u(k-i_1) = \sum_{i_1=0}^k g(i_1) u(k-i_1) \tag{44}$$

$G(0)=0$ olduğunu göstermek için bir basamak fonksiyonu kullanarak yazarsak

$$g(i_1) = A_0^{i_1-1} b_1 \delta_{-1}(i_1-1) \tag{45}$$

Şimdi $x_2(k)$ üçgensel formda yazılabilir, vektör çekirdek ifadesi

$$w_{tri}(k, i_1, i_2) = \begin{cases} A_0^{k-1-i} A_1 A_0^{i_1-1-i_2}, & k > i_1 > i_2 \geq 0 \\ A_0^{k-1-i} b_2, & k > i_1 = i_2 \geq 0 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olduğu durumda

$$x_2(k) = \sum_{i=0}^k \sum_{i_2=0}^{i_1} w_{tri}(k, i_1, i_2) u(i_1) u(i_2)$$

ya da birim adım ve birim işaret fonksiyonlarını kullanarak

$$\begin{aligned}
w_{tri}(k, i_1, i_2) &= A_0^{k-1-i} A_1 A_0^{i_1-1-i_2} b \delta_{-1}(k-1-i_1) \delta_{-1}(i_1-1-i_2) \\
&= A_0^{k-1-i} b_2 \delta_{-1}(k-1-i_1) \delta_0(i_1-i_2), \quad i_1, i_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Sabitliği kontrol etmek için

$$w_{tri}(0, i_1-k, i_2-k) = w_{tri}(k, i_1, i_2) \tag{47}$$

Böylece sabit formdaki bir üçgensel çekirdek

$$\begin{aligned}
g_{tri}(i_1, i_2) &= w_{tri}(0, -i_1, -i_2) \\
&= A_0^{i_1-1} A_1 A_0^{i_1-1-i_2} b_1 \delta_{-1}(i_1-1) \delta_{-1}(i_1-1-i_2) \\
&= +A_0^{i_1-1} b_2 \delta_{-1}(i_1-1) \delta_0(i_2-i_1), \quad i_1 = i_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{48}$$

İlk üçgensel tanım kümesi üzerinde üçgensel çekirdek

$$\begin{aligned}
g_{tri}(i_1, i_2) &= A_0^{i_2-1} A_1 A_0^{i_1-1-i_2} b_1 \delta_{-1}(i_2-1) \delta_{-1}(i_1-1-i_2) \\
&+ A_0^{i_2-1} b_2 \delta_{-1}(i_2-1) \delta_0(i_1-i_2)
\end{aligned} \tag{49}$$

Böylece düzenli çekirdek

$$\begin{aligned}
g_{reg}(i_1, i_2) &= g_{tri}(i_1 + i_2, i_2) \\
&= A_0^{i_2-1} A_1 A_0^{i_1-1} b_1 \delta_{-1}(i_2-1) \delta_{-1}(i_1-1) + A_0^{i_2-1} b_2 \delta_{-1}(i_2-1) \delta_0(i_1)
\end{aligned} \tag{50}$$

İle $i_1, i_2 \geq 0$ için verilir.

Formül 39 daki çıktı eşitliği göz önüne alınarak $y_2(k)$ nın 2. dereceden çıktısı

$$\begin{aligned}
y_2(k) &= c_0 x_2(k) + c_1 x_1(k) u(k) + d_2 u^2(k) \\
&= \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^k c_0 g_{reg}(i_1, i_2) u(k-i_1-i_2) u(k-i_2) \\
&+ \sum_{i_1=0}^k c_1 g(i_1) u(k-i_1) u(k) + d_2 u^2(k) \\
&= \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^k h_{reg}(i_1, i_2) u(k-i_1-i_2) u(k-i_2)
\end{aligned} \tag{51}$$

Formül 45 ve 50 den

$$h_{reg}(i_1, i_2) = \begin{cases} d_2, i_1 = i_2 = 0 \\ c_1 A_0^{i_1-1} b_1, \quad i_1 > 0, i_2 = 0 \\ c_0 A_0^{i_2-1} b_2, \quad i_1 = 0, i_2 > 0 \\ c_0 A_0^{i_1-1} c_1 A_1^{i_1-1} A_0 b_1, \quad i_1, i_2 > 0 \end{cases} \tag{52}$$

Genel olarak bu hesaplamayı yapmak için çok karışık bir toplama ve indeks işlemleri vardır. Bu yüzden detaylara inmeden basitçe sonuçları göreceğimiz formül 39 daki durum eşitliğinin dereceli düzenli çekirdeğinin state-affine uygun olarak eşitliği şu şekildedir.

$$h_{reh}(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} d_n, i_1 = \dots = i_2 = 0 \\ c_{n-1} A_0^{i_1-1} b_1, i_1 > 0, i_2 = \dots = i_n = 0 \\ c_q A_0^{i_{n-q}-1} A_r A_0^{i_{n-q-r}-1} \dots A_0^{i_{j-1}-1} b_j, \begin{cases} i_j, \dots, i_{n-q-r}, i_{n-q}, i_2 > 0 \\ \text{diğer durumlarda} = 0 \end{cases} \\ c_0 A_0^{i_n-1} A_1 A_0^{i_{n-1}-1} \dots A_1 A_0^{i_1-1} b_1, i_1, \dots, i_n > 0 \end{cases} \quad (53)$$

Her terim için formülde toplanan değerlerin n olduğunu ve sırasıyla gelen her $A_0^{i_k-1}$ katsayısını ise k indeksinin belirlediğini görmekteyiz. Genel bir n dereceli çekirdek için toplam olarak 2^n kadar terim olacaktır.

Örnek 6.4: Zaman bölmeli state-affine sistemleri örneklem girdi işaretlerine sahip çift doğrusal tek zamanlı sistemlerin tanımlamasında doğrudan ortaya çıkmaktadır. Anlaşılabilmesi için sadece 2. dereceden homojen olan bir örneği tartışacağız ve örnek işaret olarak tepki modeli kullanılacaktır. Sistem şu şekilde tanımlanmıştır.

$$h_{reg}(t_1, t_2) = ce^{At_2} De^{At_1} b, t_1, t_2 \geq 0$$

ve girdi işareti

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \delta_0(t - kT)$$

olduğu durumda

$$y(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{reg}(\sigma_1, \sigma_2) u(t - \sigma_1 - \sigma_2) u(t - \sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1$$

T nin örneklem periyodu olması durumunda. O zaman, m^{th} deki zamanda örnek olayın çıktısı şu şekilde verilir

$$\begin{aligned} y(mT) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{reg}(\sigma_1, \sigma_2) \sum_{k_1=0}^{\infty} u(k_1T) \delta(mT - \sigma_1 - \sigma_2 - k_1T) \\ &\quad \sum_{k_2=0}^{\infty} u(k_2T) \delta(mT - \sigma_1 - \sigma_2 - k_2T) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} h_{reg}(k_2T - k_1T, mT - k_2T) u(k_1T) u(k_2T) \end{aligned}$$

Bu ifadeyi düzenli bir forma çevirmek için toplamadaki değişkenlerin değiştirilmesi (yeniden düzenlenmesi) gerekir. Öncelikle k_2 yerine $j_2 = m - k_2$ ye k_1 yerine $j_1 = m - j_2 - k_1$ yazalım. Daha sonra ise giriş işareti ve düzenli çekirdeğin her ikisinin de negatif değerler için sıfır olduğu gerçeğinden hareketle

$$y(mT) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{reg}(j_1T, j_2T) u(mT - j_1Tj_1 - j_2Tj_1) u(mT - j_2T)$$

Böylece bu zaman bölmeli için düzenli çekirdeğin gösterimi şu şekildedir

$$h(j_1T, j_2T) = c(e^{AT})^{j_2} D(e^{AT})^{j_1} b, \quad j_1, j_2 \geq 0$$

Şimdi tanımlarla beraber

$$A_0 = e^{AT}, \quad A_1 = D, \quad b_1 = e^{AT} b, \quad b_2 = Db$$

$$c_0 = ce^{AT}, \quad c_1 = cD, \quad d_2 = cDb$$

Son bir yorum olarak formül 53 deki fonksiyonun n. üssünü almak oldukça kolay olmaktadır.

$$H_{reg}(z_1, \dots, z_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, j_2) z_1^{-i_1} \dots z_n^{-i_n}$$

$$= d_n + c_{n-1}(z_1I - A_0)^{-1} b_1 + \dots$$

$$+ c_q(z_{n-q}I - A_0)^{-1} A_r(z_{n-q}I - A_0)^{-1} \dots (z_jI - A_0)^{-1} b_j \dots$$

$$+ c_0(z_nI - A_0)^{-1} A_1(z_{n-q}I - A_0)^{-1} A_1 \dots A_1(z_1I - A_0)^{-1} b_1$$
(54)

Her ne kadar bu ifade formül 53 de olduğu gibi çok açık olmasa da 2^n li terimleri ortaya çıkarmak biraz çalışmayla mümkündür.

Örnek 6.5 Formül 39 daki state-affine durum eşitliğinin 3. dereceden normal fonksiyona çevrilmiş formülü

$$H_{reg}(z_1, z_1, z_3) = d_3 + c_2(z_1I - A_0)^{-1} b_1 + c_2(z_2I - A_0)^{-1} b_2$$

$$+ c_0(z_3I - A_0)^{-1} b_3 + c_1(z_2I - A_0)^{-1} A_1(z_2I - A_0)^{-1} b_1$$

$$+ c_0(z_3I - A_0)^{-1} A_2(z_2I - A_0)^{-1} b_1 + c_0(z_3I - A_0)^{-1} A_1(z_2I - A_0)^{-1} b_2$$

$$+ c_0(z_3I - A_0)^{-1} A_1(z_2I - A_0)^{-1} A_1(z_1I - A_0)^{-1} b_1$$

Eğer durum eşitliği gerçekten çift doğrusal ise o zaman en son ifade en doğrusudur.

6.4 State-Affine uygulama teorisi

Zaman bölmeli sistemler için uygulama problemi temel olarak düzenli dönüşüm fonksiyonu girdi/çıktı gösterimi ve state-affine denklemleri ışığında tartışılacaktır. Böylece burada bahsedilen uygulama teorisi 4. bölümde anlatılardan daha geneldir. Aslında zaman bölmeli sistemler için çift doğrusal uygulama teorisi göreceli olarak daha az karmaşık özel bir durum olarak karşımıza çıkacak. (Çift doğrusal uygulama teorisi 4. bölümdeki s'lerin z'lerle toptan yer değiştirmesi yolu ile de elde edilebilir). Burada homojen ve polinom sistemlere ağırlık verecek ve volterra sistemlerini ise orijinal araştırmada bırakacağız.

Dönüşüm fonksiyonun eğer polinomların bir kesiri olarak yazılabiliyorsa doğrusal olarak adlandırıldığını hatırlayalım.

$$H(z_1, \dots, z_n) = \frac{p(z_1, \dots, z_n)}{Q(z_1, \dots, z_n)} \quad (55)$$

Eğer $p(z_1, \dots, z_n)$ in derecesi ; $Q(z_1, \dots, z_n)$ nin derecesinden küçükse doğrusal dönüşüm fonksiyonunu uygun (tamamen uygun) diye adlandırılır. Eğer $Q(z_1, \dots, z_n) = Q_1(z_1) \dots Q_n(z_n)$ ise tanınabilir diye adlandırılır. 4. bölümdeki gibi numarator ve denaminator polinomlar göreceli olarak önemsiz konuları dışarıda bırakabilmek için esastır.

n. dereceden homojen veya polinom bir sistemin state-affine uygulaması şu şekilde olur

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=0}^{n-1} A_i x(k) u^i(k) + \sum_{i=1}^n b_i u^i(k) \\ y(k) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i x(k) u^i(k) + \sum_{i=1}^n d_i u^i(k) \end{aligned} \quad (56)$$

Sonlu $x(k)$ durum vektörünün boyutu uygulamanın boyutu olarak adlandırıldığı durumda formül 56 daki toplamın üst limitlerinin sistemin derecesi ile uyumlu olduğuna dikkat edelim. Bu formülleri kullanarak uygulama üzerinde şu sonuçlara varabiliriz.

Teorem 6.7 : n. derecen bir homojen zaman bölmeli sistem ancak ve ancak düzenli dönüşüm fonksiyonu uygun, tanınabilir fonksiyon ise state-affine tanınabilir olarak adlandırılabilir.

İspat : Eğer sistemin state-affine uygulaması varsa düzenli dönüşüm fonksiyonu formül 54 deki gibi yazılabilir. Her $(z_2 I - A_0)^{-1}$ i klasik adjoint-over-determinant formunda yazmak ve terimleri ortak bir denaminator üzerine yerleştirmek $H_{reg}(z_1, \dots, z_n)$ nin uygun, tanınabilir fonksiyon olduğunu gösterir.

Eğer $H_{reg}(z_1, \dots, z_n)$ uygun, tanınabilir bir fonksiyon ise o zaman bunu şu şekilde yazabiliriz.

$$H_{reg}(z_1, \dots, z_n) = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{Q_1(z_1) \dots Q_n(z_n)} \quad (57)$$

Burada

$$\begin{aligned} P(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{j_1=0}^{m_1} \dots \sum_{j_n=0}^{m_n} p_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \\ Q_i(z_i) &= z_i^{m_i} + \sum_{j_i=0}^{m_i-1} q_{i,j_i} z_i^{j_i}, i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (58)$$

Sürekli zaman durumundaki gibi, payda polinomu matriks faktörlü olarak yazılabilir.

$$P(z_1, \dots, z_n) = z_n \dots z_2 z_1^P$$

$z_j \in \{0, 1\}$, $z_1, \dots, z_n$ ve $j=1, \dots, n$ değerlerini alırken P katsayılar vektörüdür. Düzenli transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi faktörlü halde yazılabilir.

$$\begin{aligned} H_{reg}(z_1, \dots, z_n) &= \frac{z_n}{Q_n(z_n)} \dots \frac{z_2}{Q_2(z_2)} \frac{z_1^P}{Q_1(z_1)} \\ &= G_n(z_n) \dots G_2(z_2) G_1(z_1) \end{aligned}$$

Herbir $G_j(z_j)$ uygun tamsayılardan oluşan bir matrkstir. Böylece, doğrusal farketme tekniğiyle aşağıdaki eşitlik çıkartılabilir.

$$G_j(z_j) = \hat{C}_j (z_j I - \hat{A}_j)^{-1} \hat{B}_j + \hat{D}_j, j = 1, \dots, n$$

A_0 blok köşegeni olsun ve A_j j . blok altköşegeni dışında 0 olsun.

$$A_0 = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \hat{A}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \hat{A}_n \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{B}_2 \hat{C}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \hat{B}_n \hat{C}_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{B}_{j+1} \hat{D}_j \dots \hat{D}_2 \hat{C}_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \hat{B}_n \hat{D}_{n-1} \dots \hat{D}_{n-j+1} \hat{C}_{n-j} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

j. blok hariç tüm satırlar 0 olsun,

$$b_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \hat{B}_j \hat{D}_{j-1} \cdots \hat{D}_1 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j=2, \dots, n$$

Aşağıdaki eşitliğe göre (n-1). blok hariç tüm c_j satırları 0 olsun,

$$c_0 = [0 \dots 0 \hat{C}_n]$$

$$c_j = [0 \dots (\hat{D}_n \cdots \hat{D}_{n-j+1} \hat{C}_{n-j}) \dots 0], \quad j=1, \dots, n-1$$

Ve son olarak $d_1 = \dots = d_{n-1} = 0, d_n = \hat{D}_n \hat{D}_{n-1} \cdots \hat{D}_1$. Buna benzer düzenli transfer fonksiyonları (54)'den hesaplanabilir. Özel blok yapısı yüzünden, derecesi 0 olmayan tüm transfer fonksiyonları 0'dır, ve n. derece transfer fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} H_{reg}(z_1, \dots, z_n) &= (\hat{D}_n + \hat{C}_n(z_n I - \hat{A}_n)^{-1} B_n) \cdots (\hat{D}_1 + C_1(z_1 I - \hat{A}_1)^{-1} B_1) \\ &= G_n(z_n) \cdots G_1(z_1) \end{aligned}$$

İlginç olmayan bir örnek olarak bu hesaplama ispatı tamamlamaktadır.

Teorem 6.1. Sadece ve sadece sistemin düzenli transfer fonksiyonu kesin uygun, tanınabilir fonksiyonsa n. dereceden homojen, ayrı zamanlı sistem çifte lineer olarak tanınabilir.

En düşük durum tanımlarının yapısına başlamadan önce belki de hafif olarak tanımlamada digressiondan bahsetmek iyi olacaktır. Şu ana kadar düzenli transfer fonksiyonları cinsinden tüm tanımlama sonuçlarını sundum. Bu sonuçlar kolayca üçgen transfer fonksiyonu gösterimine kolayca çevirilebilmektedir çünkü basit bir değişkenlerin değişimi iki transfer fonksiyonuyla ilgilidir. Ama simetrik transfer fonksiyonları cinsinden tanımlamadan bahsetmek çok zordur. Bu konuya yaklaşımın bir yolu düzenli ve simetrik transfer fonksiyonları arasında ilişki kurmaktır. Bu konu bölüm 6.2 de 2. dereceden durumu için tartışılmıştır, bu tartışma bu kısımdan sonradır.

Örnek 6.6. İlişkiden yola çıkarak,

$$H_{sym}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} H_{reg}(z_1, z_1 z_2) + \frac{1}{2} H_{reg}(z_2, z_1 z_2)$$

Açıktır ki, 2. dereceden homojen sistem için simetrik transfer fonksiyonu aşağıdaki formda olmalıdır:

$$H_{sym}(z_1, z_2) = \frac{P(z_1, z_2)}{Q_1(z_1)Q_1(z_2)Q_2(z_1 z_2)}$$

Burada, $Q_1(z_1)$ ve $Q_2(z_2)$ tek değişken polinomlar ve $P(z_1, z_2)$ 2 değişkenli polinomdur. Ama payda herhangi bir rakam olamaz, ayrıca $P(z_1, \dots, z_n)$ formunda kısıtlamalar da vardır.

$$H_{sym}(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2 - 1}$$

Yukarıdaki simetrik transfer fonksiyonu state-affine tanımlıdır çünkü tekabül eden düzenli transfer fonksiyonu uygun, tanımlanabilir kesir fonksiyondur.

$$H_{sym}(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_2 - 1}$$

Teorem 6.7'nin ispatında verildiği gibi state-affine tanımlamasının kurumu bu durumda oldukça basit.

$$\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 0, \hat{D}_1 = 1$$

$$\hat{C}_2 = \hat{A}_2 = \hat{B}_2 = \hat{D}_2 = 1$$

Böylece state-affine tanımı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^2(k) \\ y(k) &= [01]x(k) + u^2(k) \end{aligned}$$

$\hat{u}(t) = u^2(t)$ yeni girdisini tanımlayarak bu durum çok kolaydır, tanımlama lineerdir.

Polinom sistem durumu için, düşünülmesi doğal olan girdi çıktı gösterimi homojen alt sistemlerin düzenli transfer fonksiyonlarının sırasındır. O zaman temel tanımlama basit olarak bölüm 4.3'deki teorem 4.9'un tekrar ifadesidir.

Teorem 6.8. Sadece ve sadece her homojen alt sistemin düzenli transfer fonksiyonu uygun, tanımlanabilir fonksiyonsa bir polinom ayrı zamanlı sistem state-affine tanımlıdır.

Polinom sistemler için minimum boyut state-affine tanımlamalar kurmak için, bölüm 4'deki gibi kaydırma operatörü yaklaşımı kullanılacaktır. State-affine durumuyla ilgilenmek için daha fazla terim çeşidi vardır, z-transformu tanımından dolayı negatif güç serileri yerine pozitif olmayan güç serileri içermektedir. Ama, temel olarak fikirler aynıdır.

$$\hat{H}(z_1, \dots, z_n) = (H(z_1), H_{reg}(z_1, z_2), \dots, H_{reg}(z_1, \dots, z_n), 0, \dots) \quad (59)$$

$$H_{reg}(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_k) z_1^{-i_1} \dots z_k^{-i_k} \quad (60)$$

Eşitlik (59) verilen düzenli transfer fonksiyonlarının sınırlı uzunluktaki sıra için, minimum tanımlama problemi aşağıdaki gibidir. $m \times m$ boyutunda $A_0, \dots, A_{N-1}$, $m \times 1$ boyutunda $b_1, \dots, b_N$, $1 \times m$ boyutunda $c_0, \dots, c_{N-1}$ ve $d_1, \dots, d_N$ katsayıları eşitlik (53) $n=1, \dots, N$ için sağlanan, eşitlik (53)'de $n > N$ için sağ tarafı 0 yapan ve m 'yi olabildiğince küçük yapan matrislerini bulun. Bu matrisler m boyutunda eşitlik (56)'da state-affine tanımını belirtmektedir. Bu tip bir tanım için $(A_j, b_j, c_j, d_j, R^m)$ kısayol gösterimi kullanılacaktır.

Aşağıdaki gibi pozitif olmayan güç serisi veriliyor:

$$V_k(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} v_{i_1, \dots, i_k} z_1^{-i_1} \dots z_k^{-i_k} \quad (61)$$

Kaydırma operatörü tanımlayın:

$$SV_k(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_k=0}^{\infty} \sum_{i_{k+1}=0}^{\infty} v_{i_1+1, i_2, \dots, i_k} z_1^{-i_1} \dots z_k^{-i_k} \quad (62)$$

Kaydırmanın lineer bir operatör olduğunu göstermek kolaydır:

$$SV_k(z_1, \dots, z_k) = z_1 [V_k(z_1, \dots, z_k) - V_k(\infty, z_2, \dots, z_k)] \quad (63)$$

$SV_k(z_1, \dots, z_k)$ ayrıca pozitif olmayan güç serisidir. İndeks operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$TV_k(z_1, \dots, z_k) = \begin{cases} 0, \dots, k=1 \\ \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} v_{0, i_1, \dots, i_{k-1}} z_1^{-i_1} \dots z_{k-1}^{-i_{k-1}}, k > 1 \end{cases} \quad (64)$$

$$TV_k(z_1, \dots, z_k) = V_k(\infty, z_1, \dots, z_{k-1}), k > 1 \quad (65)$$

T'nin lineer operatör olduğunu görmek zor değil, öyleki $TV_k(z_1, \dots, z_k)$ pozitif olmayan güç serisidir. Aynı S ve T sembolleri kullanılacaktır. Bu tanımlar pozitif olmayan güç serilerinde belli uzunluktaki sıralamalara genişletilebilir.

$$S(V(z_1), V_2(z_1, z_2), V_3(z_1, z_2, z_3), \dots) = (SV(z_1), SV_2(z_1, z_2), SV_3(z_1, z_2, z_3), \dots) \quad (66)$$

$$T(V(z_1), V_2(z_1, z_2), V_3(z_1, z_2, z_3), \dots) = (TV_2(z_1, z_2), TV_3(z_1, z_2, z_3), \dots) \quad (67)$$

Eşitlik (59)'daki gibi tanımlanan N. dereceden polinom sistemi düşünün. Pozitif olmayan güç serilerinin belli uzunluktaki dizilerinin lineer uzaydaki toplamı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \text{span}\{\hat{H}(z_1, \dots, z_N), S\hat{H}(z_1, \dots, z_N), S^2\hat{H}(z_1, \dots, z_N), \dots\} \\
U_2 &= \text{span}\{T U_1, ST U_1, S^2 T U_1, \dots\} \\
&\vdots \\
U_N &= \text{span}\{T U_{N-1}, ST U_{N-1}, S^2 T U_{N-1}, \dots\} \\
U &= \text{span}\{U_1, U_2, \dots, U_N\}
\end{aligned} \tag{68}$$

S ve T lineer operatörler olarak, U da düzlemve aralık olarak görülebilir.

$L_j : R \rightarrow U$ başlangıç operatörlerini aşağıdaki tanımlara göre yapınız.

$$\begin{aligned}
L_1 r &= S\hat{H}(z_1, \dots, z_N)r \\
L_2 r &= ST\hat{H}(z_1, \dots, z_N)r \\
&\vdots \\
L_N r &= S T^{N-1} \hat{H}(z_1, \dots, z_N)r
\end{aligned} \tag{69}$$

$E_j : U \rightarrow R$ değerlendirme operatörleri setini aşağıdaki gibi tanımlayın:

$$\hat{V}(z_1, \dots, z_N) = (V_1(z_1), V_2(z_1, z_2), \dots, V_N(z_1, \dots, z_N), 0, \dots)$$

U'nun bir elemanıdır.

$$\begin{aligned}
E_0 \hat{V}(z_1, \dots, z_N) &= V_1(\infty) \\
E_1 \hat{V}(z_1, \dots, z_N) &= E_0 T \hat{V}(z_1, \dots, z_N) = V_2(\infty, \infty) \\
&\vdots \\
E_{N-1} \hat{V}(z_1, \dots, z_N) &= E_0 T^{N-1} \hat{V}(z_1, \dots, z_N) = V_N(\infty, \dots, \infty)
\end{aligned} \tag{70}$$

Son olarak, $d_j : R \rightarrow R$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$d_j = H_{reg}(z_1, \dots, z_j) |_{z_1=\dots=z_j=\infty}, j = 1, \dots, N \tag{71}$$

Tüm bunların kendi düzlemlerinde lineer operatörler olduğunu göstermek çok kolay. Eğer U sınırlı boyutta ise o zaman (ST^j, L_j, E_j, d_j, U) verilen polinomun sınırlı boyutta, state-affine tanımıdır. Bu yapıldıktan sonra, tam bir tanım bulmak U'ları R^m 'ler ile değiştirmeyi ve $A_j = S T^j, b_j = L_j, c_j = E_j$ matris gösterimlerini bulmayı ve d_j operatörlerinin sabit olarak değerlendirilmesini gerektirmektedir. Bu işlemin verdiği minimum boyut state-affine

tanımının ispatı ihmal edilecektir çünkü çok karışıktır. Aslında (ST^j, L_j, E_j, dj, U) tanım olan çoğu ifadeyi ihmal edeceğim. Hesaplamanın nasıl gittiğini göstermek için, $N > 3$ olan N . dereceden polinom sistemini durumunu düşünün.

$$\begin{aligned}\hat{H}(z_1, \dots, z_N) &= (H(z_1), H_{reg}(z_1, z_2), H_{reg}(z_1, z_2, z_3), \dots) \\ &= (\sum_{i_1=0}^{\infty} h(i_1) z_1^{-i_1}, \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, i_2) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2}, \\ &\quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, i_2, i_3) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} z_3^{-i_3}, \dots)\end{aligned}$$

O zaman eşitlik (53) 3. dereceden bir seçimle aşağıdaki gibi yazılabilir. Burada d_3 sabittir.

$$d_3 = H_{reg}(\infty, \infty, \infty) = h_{reg}(0, 0, 0)$$

Eşitlik (53)'deki $c_2 A_0^{j_1-1} b_1$ terimi aşağıdaki eşitliğe denktir.

$$\begin{aligned}E_2 S^{j_1-1} L_1 &= E_0 T^2 S^{j_1} \hat{H}(z_1, \dots, z_N) \\ &= E_0 T^2 (\sum_{i_1=0}^{\infty} h(i_1 + j_1) z_1^{-i_1}, \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{reg}(i_1 + j_1, i_2) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2}, \\ &\quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} h_{reg}(i_1 + j_1, i_2, i_3) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} z_3^{-i_3}, \dots) \\ &= E_0 (\sum h_{reg}(j_1, 0, i_1) z_1^{-i_1}, \dots) = h_{reg}(j_1, 0, 0)\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $c_o A_0^{j_3-1} A_2 A_0^{j_1-1} b_1$ aşağıdaki eşitliğe denktir.

$$\begin{aligned}E_0 S^{j_3-1} (S T^2) S^{j_1-1} L_1 &= E_0 S^{j_3} T^2 S^{j_1} \hat{H}(z_1, \dots, z_N) \\ &= E_0 S^{j_3} (\sum_{i_1=0}^{\infty} h_{reg}(j_1, 0, i_1) z_1^{-i_1}, \dots) \\ &= E_0 (\sum_{i_1=0}^{\infty} h_{reg}(j_1, 0, i_1 + j_3) z_1^{-i_1}, \dots) \\ &= h_{reg}(j_1, 0, j_3)\end{aligned}$$

Tüm bu kaydırmadan sonra, indeksleme ve değerlendirme çok eğlenceli olmaktadır. Ben okuyuculara birkaç örnek daha yapmalarını tavsiye ederim. Ama, tanımlamayı genelleştirebilmek için gerekli olan gösterim ve hesaplama yatırımı belki de uymayabilir.

Örnek 6.7 Hesaplamaların doğasını sabitlemek için aşağıdaki gibi anlatılan basit bir polinom sistemi düşünün.

$$\hat{H}(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, \frac{z_2}{z_2 - 1}, 0, \dots \right)$$

(Burada düzenli transfer fonksiyonlarının güç serileri formuyla çalışmayacağım.) Kaydırma operatörünün uygulaması aşağıdaki eşitliği vermektedir:

$$S\hat{H}(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, 0, \dots \right)$$

$$S^2 \hat{H}(z_1, z_2) = S\hat{H}(z_1, z_2)$$

Böylece,

$$U_1 = \text{span} \left\{ \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, \frac{z_2}{z_2 - 1}, 0, \dots \right), \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, 0, \dots \right) \right\}$$

İndeks operatörünün uygulaması aşağıdaki sonucu vermektedir:

$$T\hat{H}(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, 0, \dots \right)$$

Kolay hesaplamalar gösteriyor ki;

$$ST\hat{H}(z_1, z_2) = T\hat{H}(z_1, z_2)$$

$$TS\hat{H}(z_1, z_2) = 0$$

Böylece, $U_2 \subset U_1$ ve U lineer uzayı U_1 olarak alınabilir. U iki boyutlu olduğu için, $\mathbb{R}^2$ ile değiştirilebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, \frac{z_2}{z_2 - 1}, 0, \dots \right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{z_1}{z_1 - 1}, 0, \dots \right)$$

Bu bazda alınarak, kaydırma ve indeks operatörleri aşağıdaki matrislerle verilmektedir:

$$S = \begin{bmatrix} 00 \\ 01 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$A_0 = S = \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad A_1 = ST = \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Başlangıç operatörleri aşağıdaki gibidir:

$$L_1 = SH(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = STH(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Değerlendirme operatörleri aşağıdaki sonuçları vermektedir:

$$E_0 \hat{H}(z_1, z_2) = 1, E_0 S \hat{H}(z_1, z_2) = 1$$

$$E_1 \hat{H}(z_1, z_2) = 1, E_1 S \hat{H}(z_1, z_2) = 0$$

Karşılı gelen matris gösterimleri aşağıdadır:

$$C_0 = [1.1], \dots C_1 = [1.0]$$

Sonuç olarak, sabit terimlerin $d_1=d_2=1$ olduğu açıktır. Böylece, verilen sistemin minimum state-affine tanımı aşağıdaki gibidir:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix} x(k)u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^2(k)$$

$$y(k) = [11]x(k) + [10]x(k)u(k) + u(k) + u^2(k)$$

Bu yaklaşımın Volterra sistem durumuna uzantısı kanıtı olmalıdır. Ortaya çıkan zorluk çeşitleri bölüm 4.4’de belirtilmiştir, ve genel teori bölüm 6.8’deki araştırma literatüründe detaylı olarak tartışılmıştır.

6.5. Ayır Zamanlı Sistemlerin Yanıtlama Karakteristikleri

Homojen ve polinom ayır zamanlı sistemlerin girdi sinyallerinin çeşitli sınıflara yanıtı bölüm 5’deki yaklaşım kullanılarak analiz edilebilir. Birim pals ve sinuzoidal girdiler için

analizin nasıl gittiğini açıklayacağım. Tesadüfi girdi sinyalleri için, devam eden zaman durumuna paralel olarak sonuçların bazıları bölüm 5.5'deki bakış açısından daha az resmi olarak türetilcektir.

Geciken birim palslerin toplamalarının girdi bileşenlerine n. dereceden homojen sistemin yanıtını öncelikle düşünün, burada birim pals aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \quad (72)$$

Simetrik gösterim cinsinden, bölüm 5.1'deki hesaplamalar direkt olarak çıkmaktadır, ve burada tekrarlanmayacaktır. Ama, belki de şaşırtıcı bir özelliği bulunan bir noktayı vurgulamak için düzenli gösterim cinsinden bazı basit hesaplamalar üzerinden gideceğim.

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{nreg}(i_1, \dots, i_n) u(k - i_1 - \dots - i_n) \dots u(k - i_n) \quad (73)$$

Yukarıdaki homojen sistem için, girdinin $u(k) = \delta_0(k)$ olduğu, basit bir indirgeme ile aşağıdaki yanıtı elde ederiz:

$$y(k) = h_{reg}(0, \dots, 0, k), \quad k=0,1,\dots \quad (74)$$

Girdi iki birim palsten oluşursa daha ilginç bir durum ortaya çıkmaktadır:

$$u(k) = \delta_0(k) + a \delta_0(k - K) \quad (75)$$

Burada a bir reel sayı ve K pozitif bir tamsayıdır. Aşağıda belirtildiği gibi tekabül eden cevabın hesaplaması basittir. Eşitlik (73) 'teki cevap formülü aşağıdaki sonucu vermektedir:

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_n) [\delta_0(k - i_1 - \dots - i_n) + a \delta_0(k - K - i_1 - \dots - i_n)]$$

$$\dots [\delta_0(k - i_{n-1} - i_n) + a \delta_0(k - K - i_{n-1} - i_n)] [\delta_0(k - i_n) + a \delta_0(k - K - i_n)]$$

Sağ taraftaki son köşeli parantez içersindeki kısım gösteriyor ki toplam sadece $i_n=k$ ve $i_n=k-K$ değerleri için sıfır olmamaktadır. Böylece;

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} h_{reg}(i_1, \dots, i_{n-1}, k) [\delta_0(-i_1 - \dots - i_{n-1}) + a \delta_0(K - i_1 - \dots - i_{n-1})]$$

$$\dots [\delta_0(-i_{n-1}) + a \delta_0(-K - i_{n-1})] + \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} a h_{reg}(i_1, \dots, i_{n-1}, k - K) [\delta_0(K - i_1 - \dots - i_{n-1})$$

$$+ a \delta_0(-i_1 - \dots - i_{n-1})] \dots [\delta_0(K - i_{n-1}) + a \delta_0(-i_{n-1})] \quad (77)$$

Eşitlik (77)'de sağ tarafın birinci teriminde, küçük bir düşünüş gösteriyor ki $i_1 = \dots = i_{n-1} = 0$ olduğu zaman sadece toplam 0 olmamaktadır. İkinci terimi çözmek daha kolay, böylece hesaplamayı bir basamak daha ileri kaydırıyorum. Toplam $i_{n-1} = K$ ve $i_{n-1} = 0$ için sıfır olmamaktadır. Böylece,

$$y(k) = h_{reg}(0, \dots, 0, k) + \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-2}=0}^{\infty} a h_{reg}(i_1, \dots, i_{n-2}, K, k-K) [\delta_0(-i_1 - \dots - i_{n-2}) + a \delta_0(-i_1 - \dots - i_{n-2} - K)] \dots [\delta_0(-i_{n-2}) + a \delta_0(-i_{n-2} - K)] + \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-2}=0}^{\infty} a^2 h_{reg}(i_1, \dots, i_{n-2}, 0, k-K) [\delta_0(K - i_1 - \dots - i_{n-2}) + a \delta_0(-i_1 - \dots - i_{n-2})] \dots [\delta_0(K - i_{n-2}) + a \delta_0(-i_{n-2})]$$

Tekrar birinci toplamdan, sadece $i_1 = \dots = i_{n-2} = 0$ için toplam sıfır değildir. İkinci toplam daha da indirgenebilir, ama bir işlem çabuk olarak sonuç formülünü vermektedir:

$$y(k) = h_{reg}(0, \dots, 0, k) + a h_{reg}(0, \dots, 0, K, k-K) + a^2 h_{reg}(0, \dots, 0, K, 0, k-K) + a^3 h_{reg}(0, \dots, 0, K, 0, 0, k-K) + \dots + a^n h_{reg}(0, \dots, 0, k-K) \quad (79)$$

Yanıt formülü (79) hakkındaki ilginç nokta şudur ki $h_{reg}(i_1, \dots, i_n)$ ile anlatılan sistem lineer tanımlanabilirse ve $n > 2$ ise o zaman $y(k)$ sıfırdır. Bu şu gerçekten yola çıkılarak söylenmektedir; eğer 0 argümanı varsa homojen lineer durum eşitliğine denk düzenli çekirdek de sıfırdır. Genel bir ifadeyle, n . dereceden homojen lineer eşitlik en fazla $n-1$ sıfır olmayan değeri olan bir girdiye karşı 0 yanıtıdır. İki palslı bir durumun ispatı oldukça karışık hesaplamalar içermektedir. Oldukça kısa bir ispat Problem 6.4'te önerilmektedir. Her oranda ayrı zamanlı lineer durum eşitliğinin özelliği kısıtlı girdi/çıktı hareketini göstermektedir. Tam tersi, Bölüm 6.3'ten de anlaşılacağı gibi state-affine durum eşitlikleri oldukça geneldir.

Bölüm 5'te tartışıldığı gibi bu tipin frekans yanıt özellikleri ayrı zamanlı duruma az yada çok taşımaktadır. Bu durumu göstermek için aşağıdaki girdi işaretine ayrı zamanlı homojen sistemin sağlam yanıtını kısaca ele alacağım:

$$u(K) = 2a \cos(wk) = A e^{i w k} + A e^{-i w k} \quad (80)$$

Çıktı simetrik çekirdek cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y(k) = \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k h_{nsym}(i_1, \dots, i_n) \prod_{j=1}^n [A e^{i w (k-i_j)} + A e^{-i w (k-i_j)}] \quad (81)$$

$\lambda_1 = iw$ ve $\lambda_2 = -iw$ yaparak, n. derece ürünü genişleterek ve toplamları yeniden düzenleyerek aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$y(k) = A^n \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 \left[\sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k h_{nsym}(i_1, \dots, i_n) \exp(-\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} i_j) \right] \exp(\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} k)$$

k büyüdükçe köşeli parantez içindeki toplamların bir noktada birleştiğini farz ederek, y(k) aşağıdaki eşitlikle tanımlanan sağlam durum yanıtına oldukça yakın olur.

$$y_{ss}(k) = A^n \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 H_{nsym}(e^{\lambda_{k_1}}, \dots, e^{\lambda_{k_n}}) \exp(\sum_{j=1}^n \lambda_{k_j} k) \quad (82)$$

Eşitlik (82)'de birbirine benzer birçok üs bulunmaktadır, bu üsler transfer fonksiyonunun simetri özelliği kullanılarak bir arada toplanabilir.

$$G_{m,n-m}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}) = \binom{n}{m} H_{nsym}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}; e^{\lambda_{m+1}}, \dots, e^{\lambda_n}) \quad (83)$$

λ_1 'leri iw ile değiştirirsek ve λ_2 'leri $-iw$ ile,

$$\begin{aligned} y_{ss}(k) = & A^n [G_{n,0}(e^{iw}, e^{-iw}) e^{inwk} + G_{0,n}(e^{iw}, e^{-iw}) e^{-inwk}] \\ & + A^n [G_{n-1,1}(e^{iw}, e^{-iw}) e^{i(n-2)wk} + G_{1,n-1}(e^{iw}, e^{-iw}) e^{-i(n-2)wk}] \\ & + \dots + \left\{ A^n G_{n/2,n/2}(e^{iw}, e^{-iw}), n..çift \right. \\ & \left. A^n [G_{n+1/2,n-1/2}(e^{iw}, e^{-iw}) e^{iwk} + G_{n-1/2,n+1/2}(e^{iw}, e^{-iw}) e^{-iwk}] n..tek \right\} \end{aligned} \quad (84)$$

Standart kimlikleri kullanarak ve aşağıdaki eşitliği kullanarak,

$$G_{m,n-m}(e^{iw}, e^{-iw}) = G_{n-m,m}(e^{-iw}, e^{iw})$$

Aşağıdaki sağlam durum yanıt ifadesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} y_{ss}(k) = & 2 A^n |G_{n,0}(e^{iw}, e^{-iw})| \cos[nwk + L G_{n,0}(e^{iw}, e^{-iw})] \\ & + 2 A^n |G_{n-1,0}(e^{iw}, e^{-iw})| \cos[(n-2)wk + L G_{n-1,1}(e^{iw}, e^{-iw})] + \dots \\ & + \left\{ A^n G_{n/2,n/2}(e^{iw}, e^{-iw}), n..çift \right. \\ & \left. 2 A^n |G_{n+1/2,n-1/2}(e^{iw}, e^{-iw})| \cos[wk + L G_{n+1/2,n-1/2}(e^{iw}, e^{-iw})] n..tek \right\} \end{aligned} \quad (85)$$

Bu hesaplamalar Bölüm 5.2 ve 5.3'teki sonuçların ayrı zamanlı durum için kolaylıkla geliştirilebileceğini göstermek için yeterlidir.

5. Bölümün son ana konusu olan tesadüfi girdilerle lineer olmayan sistemler ayrı zamanlı sistemler için devamlı zamanlı durumundakine paralel olarak kolaylıkla geliştirilebilir. Bunu yapmaktansa daha genel bir bakış açısıyla tesadüfi girdilerle ayrı zamanlı lineer olmayan sistemler için dikey gösterimler üzerinde duracağım.

Tesadüfi girdi işaretleriyle lineer olmayan sistemler için dikey gösterimlerin geliştirilmesi tesadüfi bir işlemle dikeyleştirme bazında olacaktır. Ayrı zamanlı tesadüfi işlem aşağıdaki formatta yazılmaktadır:

$$u = \{u(k); k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (86)$$

Burada u'nun reel sayı olduğu, sabit olduğu ve negatif olmayan tüm n'ler için $|E[u^n(k)]| < \infty$ olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, tüm negatif olmayan n'ler için tesadüfi u işleminin n. dereceden bağımsız olduğu da kabul edilmektedir. Farklı indisler $i_1, \dots, i_n$ ve polinomlar $p_1(x), \dots, p_n(x)$

$$E[p_1(u(i_1)) \dots p_n(u(i_n))] = E[p_1(u(i_1))] \dots E[p_n(u(i_n))] \quad (87)$$

Bu sınırlayıcı bir kabullenme ama önemli bir rol oynamaktadır. Beyaz Gaussian tesadüfi işleminin bu kabullenmeyi sağladığı gösterilebilir, böylece buradaki durum Bölüm 5.5'te değinilen ayrı zamanlı versiyonu içermektedir.

Tanım 6.1 Eğer aşağıdaki türden reel, simetrik polinom fonksiyonlar varsa tesadüfi u işlemi dikeylenebilir polinom olarak adlandırılır.

$$\Phi_n(i_1, \dots, i_n, u) = \Phi_n(u(i_1), \dots, u(i_n)), n = 0, 1, 2, \dots \quad (88)$$

Tüm tamsayılar $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$ için,

$$E[\Phi_n(i_1, \dots, i_n, u) \Phi_m(j_1, \dots, j_m, u)] \\ = \begin{cases} E[\Phi_n(i_1, \dots, i_n, u) \Phi_n(j_1, \dots, j_n, u)] & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Böyle bir kümeye u için polinom dikey gösterimi denmektedir.

Tesadüfi bir işlem için polinom dikey gösterim bulmaya bir yaklaşım aşağıdaki gibidir. Φ_n için kullanılacak gösterim tekrarlanan argümanları bir araya getirmek ve varoluş sayılarını göstermektir. Simetri özelliğinden tekrar sıralamanın o kadar da önemli olmadığı açıktır.

Yardımcı Önerme 6.2. $\Psi_0(x) = 1$ olan $\Psi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$ tek değişkenli polinom setini düşünün. Burada u tesadüfi işlemi aşağıdaki gibidir:

$$E[\Psi_n(u(k))\Psi_m(u(k))]=\begin{cases} E[\Psi_n^2(u(k))] < \infty, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases} \quad (90)$$

O zaman u tesadüfî işlemi dikey polinom ve dikey polinom gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\Phi_n(\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_1; \dot{i}_p, \dots, \dot{i}_p; u) = \Psi_{n_1}(u(\dot{i}_1)) \dots \Psi_{n_p}(u(\dot{i}_p)) \quad (91)$$

$\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_p$ farklı tamsayılar ve $n_1 + \dots + n_p = n$.

İspat: Eşitlik (91)'de belirtilen her Φ_n simetrik polinom fonksiyondur. Bundan başka, eşitlik (91)'deki gibi tekrar eden argümanları toplayarak $E[\Phi_n(\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_n, u)\Phi_n(\dot{j}_1, \dots, \dot{j}_n, u)]$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E[\Phi_n(\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_1; \dots; \dot{i}_p, \dots, \dot{i}_p, u)\Phi_m(\dot{j}_1, \dots, \dot{j}_1; \dots; \dot{j}_q, \dots, \dot{j}_q, u)] \\ E[\Psi_{n_1}(u(\dot{i}_1)) \dots \Psi_{n_p}(u(\dot{i}_p)) \Psi_{m_1}(u(\dot{j}_1)) \dots \Psi_{m_q}(u(\dot{j}_q))] \quad (92)$$

$n_1 + \dots + n_p = n$ ile $\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_p$ farklı ve $m_1 + \dots + m_q = m$ ile $\dot{j}_1, \dots, \dot{j}_q$ farklıdır. Eğer $m \neq n$ ise $\{\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_p, \dot{j}_1, \dots, \dot{j}_q\}$ kümesi içinde i_1 gibi farklı bir tamsayı var ya da $n_1 \neq m_1$ olmayan $\dot{i}_1 = \dot{j}_1$ olan iki aynı tamsayı var. Beklenen değerlerin sonucu olarak eşitlik (92)'yi yazmak için bağımsızlık kabullenmesini kullanarak, ilk durumda çarpanlardan biri 0 olan $E[\Psi_{n_1}(u(\dot{i}_1))]$ çünkü $\Psi_{n_1}(x) \Psi_{n_0}(x) = 1$ 'e diktir. Sonraki durumda çarpanlardan biri yine 0 olan $E[\Psi_{n_1}(u(\dot{i}_1)) \dots \Psi_{m_p}(u(\dot{i}_1))]$ olacaktır. Böylece eşitlik (89) kanıtlanmış oldu, ancak $n=m$ iken, $\{\dot{j}_1, \dots, \dot{j}_n\} \setminus \{\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_n\}$ nin permütasyonu olmadığından eşitlik 0 vermektedir. Eğer permütasyon durumu tutarsa, o zaman $E[\Phi_n(\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_n, u)\Phi_n(\dot{j}_1, \dots, \dot{j}_n, u)]$ ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E[\Phi_n^2(\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_1; \dots; \dot{i}_p, \dots, \dot{i}_p, u)] = E[\Psi_{n_1}^2(u(\dot{i}_1))] \dots E[\Psi_{n_p}^2(u(\dot{i}_p))] \quad (93)$$

$\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_p$ farklı ve $n_1 + \dots + n_p = n$ 'dir.

Bu konu boyunca ele alınacak örnek bölüm 5.5'te devamlı zaman durumu için Wiener dikey gösteriminde tartışılan örneğe denktir.

Örnek 6.8 Tesadüfî u işleminin ortalamasının 0, Gaussian ve $E[u^2(k)] = A$ yoğunluğu ile beyaz olduğunu kabul edelim. O zaman u'nun n. dereceden bağımsızlık koşulunu sağladığını

kolaylıkla görülmektedir. Dikey polinom gösterimi kurmak için, Hermite polinomlarıyla aşağıda verilen eşitliklerde $\Psi_n, n = 0,1,2,\dots$ alın.

$$\Psi_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r n! A^r}{r! 2^r (n-2r)!} x^{n-2r} \quad (94)$$

Burada $[n/2]$ $n/2$ 'den küçük eşit en büyük tamsayıdır. İlk birkaç Hermite polinomu aşağıdaki gibidir:

$$\Psi_0(x) = 1, \Psi_1(x) = x, \Psi_2(x) = x^2 - A$$

Bu durumda eşitlik (90)'nı doğrulamak referanslar kısmına bırakılmıştır.

$$E[\Psi_n^2(u(k))] = n! A^n \quad (95)$$

Ama Teorem 5.1 ve 5.2'nin ispatlarının benzer argümanlarının literatürde diğer yerlerde kullanılabileceğini vurgulamak isterim. Her oranda Hermite polinomları tanım (91) ile beyaz Gaussian tesadüfi işlemleri, 0 ortalama için dikey polinom gösterimine ulaşmaktadır.

Aşağıdaki çalışma tesadüfi girdilerle lineer olmayan sistemler için gösterim geliştirmede uygun olacaktır. $F[u(k)]$ tesadüfi işlem u 'nun örnek fonksiyon $u(k)$ 'nin gerçek değerli fonksiyonu olsun. $E[F^2[u(k)]] < \infty$ olsun ve $L_2(u)$ 'yu aşağıdaki iç ürün ile F ve G fonksiyonlarının Hilbert uzayı olarak ifade edelim.

$$\langle F, G \rangle = E[F[u(k)]G[u(k)]] \quad (96)$$

Yardımcı önerme 6.2'deki gibi u değişkeni için kurulan dikey polinom gösterimleri $\Phi_0, \Phi_1, \dots$ 'i düşünün. O zaman her n ve $i_1, \dots, i_n$ için $\Phi_n(i_1, \dots, i_n, u)$ $L_2(u)$ 'nun bir elemanı olsun. Eğer $f_n(i_1, \dots, i_n)$ gerçek değerli fonksiyon aşağıdaki eşitliği sağlarsa;

$$\sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_n=-\infty}^{\infty} f_n^2(i_1, \dots, i_n) < \infty \quad (97)$$

$$\sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_n=-\infty}^{\infty} f_n(i_1, \dots, i_n) \Phi_n(i_1, \dots, i_n, u) \quad (98)$$

O zaman yukarıdaki eşitlik $L_2(u)$ 'nun bir elemanıdır. Bu ifadenin anlatımı ihmal edilecektir. Eşitlik (98) formundaki ifadeleri düşünürken $\Phi_n(i_1, \dots, i_n, u)$ 'in simetrisinin $f_n(i_1, \dots, i_n)$ genellemeyi bozmayacak şekilde simetrik olduğu kabul edilebilirinin gösterimi okuyucuya bırakılmıştır.

Şimdi de girdinin reel, sabit, n. dereceden bağımsız olduğu tesadüfi işlem u olan $y(k) = H[u(k)]$ sistemini düşünün. Sistemi $L_2(u)$ 'nin bir elemanı olarak göstermek için k'yı sabit düşünün, $E[y^2(k)] < \infty$ ve basit olarak sistem sınırlı bir hafızaya sahip olduğunu kabul edin. y(k)'nin sadece u(k), u(k-1),...,u(k-M) değerlerine bağlı olduğu M pozitif tamsayısı var. Böyle bir sistem aşağıdaki fonksiyonel ifadeyle gösterilecektir:

$$y(k) = H[u(k-j), j = 0, 1, \dots, M] \quad (99)$$

u için dikey polinom gösterimini açıkça içeren eşitlik (99)'daki sistem için gösterimi hazırlamaya artık elimizdeki malzeme hazır durumdadır. Aşağıdaki formda bir gösterim düşünün:

$$\begin{aligned} y_N(k) &= H_N[u(k-j), j = 0, 1, \dots, M] \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_n=0}^M k_n(i_1, \dots, i_n) \Phi_n(k-i_1, \dots, k-i_n, u) \end{aligned} \quad (100)$$

Her bir $k_n(i_1, \dots, i_n)$ simetriktir. Açık olarak $H_N L_2(u)$ 'ya aittir ve sistem gösterimi sabit, sınırlı hafızada ve tesadüfidir. Amaç eşitlik (100) ortalama karede eşitlik (99)'a yaklaşacak $k_n(i_1, \dots, i_n)$ katsayı fonksiyonlarını seçmektir. Hatayı en düşüğe indirmek için $k_0, k_1(i_1), \dots, k_N(i_1, \dots, i_N)$ 'i seçin;

$$\begin{aligned} \|y(k) - y_N(k)\|^2 &= \langle y(k) - y_N(k), y(k) - y_N(k) \rangle \\ &= E[(y(k) - y_N(k))^2] \end{aligned} \quad (101)$$

Tanım 6.2. Eşitlik (101)'i en küçük yapan $k_n(i_1, \dots, i_n)$ simetrik fonksiyonlarına Fourier çekirdekleri denir ve oluşan eşitlik (100)'deki sonuç fonsiyonuna da sistemin Fourier seri ifade fonksiyonu denir.

Teorem 6.9. Yardımcı Önerme 6.2'deki gibi $\Psi_0(x), \Psi_1(x), \dots$ polinomlarını kullanarak u için dikey polinom gösterimi düşünün. O zaman n. derece Fourier çekirdeği aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} k_n(i_1, \dots, i_1; \dots; p i_p, \dots, i_p) &= \frac{n_1! \dots n_p!}{n! E[\Psi_{n_1}^2(u(k))] \dots E[\Psi_{n_p}^2(u(k))]} \\ &= E[y(k) \Psi_{n_1}(u(k-i_1)) \dots \Psi_{n_p}(u(k-i_p))] \end{aligned} \quad (102)$$

Burada, $i_1, \dots, i_p$ ayrı, $n_1 + \dots + n_p = n$ ve $n=0, 1, \dots, N$ 'dir.

İspat: Tüm argümanlar atılarak eşitlik (100) için kısaltılmış bir notasyon kullanarak, eşitlik (101)'deki hata kriteri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\|y - y_N\|^2 &= \langle y - \sum_{n=0}^N k_n^X \Phi_n, y - \sum_{n=0}^N k_n^X \Phi_n \rangle \\
&= \langle y, y \rangle - 2 \langle y, \sum_{n=0}^N k_n^X \Phi_n \rangle + \langle \sum_{n=0}^N k_n^X \Phi_n, \sum_{n=0}^N k_n^X \Phi_n \rangle \\
\langle k_n^X \Phi_n, k_m^X \Phi_m \rangle &= 0, n \neq m
\end{aligned}$$

Kolaylıkla elde edilen sonucu kullanarak, ve beklentiler gibi iç çarpımları yazarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\|y - y_N\|^2 = E[y^2] - 2 \sum_{n=0}^N E[y(k_n^X \Phi_n)] + \sum_{n=0}^N E[(k_n^X \Phi_n)^2]$$

Şimdi de sağ taraftaki terimleri genişletin.

$$\begin{aligned}
E[y(k_n^X \Phi_n)] &= E[y(k) \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_n=0}^M k_n(i_1, \dots, i_n) \Phi_n(k - i_1, \dots, k - i_n, u)] \\
&= \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_n=0}^M k_n(i_1, \dots, i_n) E[y(k) \Phi_n(k - i_1, \dots, k - i_n, u)]
\end{aligned}$$

Yardımcı Önerme 6.2'de Φ_n için kurma ve simetriyi özelliğini kullanarak $E[y(k_n^X \Phi_n)]$ 'de aşağıdaki gibi genel bir terim izole edilebilir. $1 \leq p \leq n$ için $i_1, \dots, i_p$ farklı negatif olmayan tamsayılar ve $n_1 + \dots + n_p = n$ ile $n_1, \dots, n_p$ pozitif tamsayılarını düşünün. O zaman $i_j, j = 1, \dots, p$ argümanının tüm bu terimlerini içeren n_j adedi birbirinin aynıdır ve bu terimlerin toplamı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
E[(k_n^X \Phi_n)^2] &= E[n \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_n=0}^M k_n(i_1, \dots, i_n) \Phi_n(k - i_1, \dots, k - i_n, u) \\
&\quad \sum_{j_1=0}^M \dots \sum_{j_n=0}^M k_n(j_1, \dots, j_n) \Phi_n(k - j_1, \dots, k - j_n, u)] \\
&= \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_n=0}^M \sum_{j_1=0}^M \dots \sum_{j_n=0}^M k_n(i_1, \dots, i_n) k_n(j_1, \dots, j_n) \\
&\quad E[\Phi_n(k - i_1, \dots, k - i_n) \Phi_n(k - j_1, \dots, k - j_n, u)]
\end{aligned}$$

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BİLGİSAYAR EĞİTİMİ

**VOLTERRA KONTROL
SİSTEMLERİ - II**

**ENDER MENTEŞ
23240152**

Yrd. Doç. Dr. REMZİ YILDIRIM

**ANKARA
2005**

Eğer F bir bilinear operatörse, bu sistemler bilinear giriş/çıkış sistemleri olarak adlandırılırlar, burada F herbir argümanda doğrusaldır. Daha kesin bişey söylemek gerekirse, F bir bilinear operatördür, eğer;

$$F[\alpha_1 u_1 + \acute{\alpha}_1 \check{u}_1, \alpha_2 u_2 + \acute{\alpha}_2 \check{u}_2] = \alpha_1 \alpha_2 F[u_1, u_2] + \alpha_1 \acute{\alpha}_2 F[u_1, \check{u}_2] + \acute{\alpha}_1 \alpha_2 F[\check{u}_1, u_2] + \acute{\alpha}_1 \acute{\alpha}_2 F[\check{u}_1, \check{u}_2] \quad (109)$$

Her gerçek $\alpha_1, \acute{\alpha}_1, \alpha_2, \acute{\alpha}_2$ ve her giriş sinyali $u_1(k), \check{u}_1(k), u_2(k), \check{u}_2(k)$ için.

Buradaki tartışmanın ana parçası, giriş/çıkış gösterimi için daha açık bir gösterim geliştirmekle ilgilidir. Bunu başarmanın en kolay yolu, durum eşitliğinin genel bir sınıfı tarafından anlaşılabilen bilinear giriş/çıkış sistemleri düşünmektir. Daha sonra bu durum eşitliğinin özel özellikleri, uygun olan giriş/çıkış gösterimlerinin özelliğini ortaya çıkarmak için kullanılabilirler.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f[x(k), u_1(k), u_2(k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ y(k) &= h(x(k)), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (110)$$

burada $x(k)$ n-boyutlu durum vektörüdür ve f ve h 'ın tatmin edici analitik fonksiyonlar $f(0,0,0) = 0$ ve $h(0) = 0$ olduğu varsayılır. Sıfır başlangıç durumundaki dengenin ve analitic ihtiyaçların seçimi sonucun önemli özelliklerini değiştirmeden çeşitli yollarla sağlanabilir. Daha genel bir çıkış eşitliği şu formdadır,

$$y(k) = h[x(k), u_1(k), u_2(k)]$$

bu yöntemlerle de idare edilebilir fakat formüller ve blok diyagramlar daha karmaşık olmaktadır.

Sonraki adım f ve h (110) fonksiyonlarının power serisini kullanarak durum eşitlik tanımının yeniden yazılması ve sonra giriş sinyalinin (109) daki belirtilen formda yazılmasıdır. $x(k)$ ve $y(k)$ genişletilerek $\alpha_1, \acute{\alpha}_1, \alpha_2$ ve $\acute{\alpha}_2$ cinsinden yazıldığında çok daha basit durum eşitliği elde edilir.

$$F(\alpha_1, u_1, \alpha_2, u_2) = \alpha_1 \alpha_2 F[u_1, u_2] \quad (111)$$

Bilinen Kronecker ürün gösterimini kullanarak, durum eşitliği (110) şu formda yazılabilir.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_1 x(k) + A_2 x(k) \otimes x(k) + D_1 x(k) u_1(k) + D_2 x(k) u_2(k) \\ &\quad + b_1 u_1(k) + b_2 u_2(k) + b_3 u_1(k) u_2(k) + \dots \\ y(x) &= c_1 x(k) + c_2 x(k) \otimes x(k) + \dots \end{aligned} \quad (112)$$

sadece altküme gelişimine giren terimler gösterilmiştir. Giriş sinyallerini $\alpha_1 u_1(k)$ ve $\alpha_2 u_2(k)$ varsayarsak,

$$x(k) = \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) + \alpha_1 \alpha_2 x_3(k) + \dots \quad (113)$$

Tekrar, bu terimleri α_1 ve α_2 cinsinden eşitlik (111) ile uyumlu bir $y(k)$ çıktısı üreteceği gösteriliyor. Eşitlik (113) 'ü durum eşitliği ve eşitleme katsayılarını α_1, α_2 ve $\alpha_1 \alpha_2$ cinsinden yazılırsa bilinear giriş/çıkış sistemleri için aşağıdaki durum eşitliği tanımı eşitlik (110) tarafından ifade edilir :

$$x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + b_1 u_1(k), \quad x_1(0) = 0$$

$$x_2(k+1) = A_1 x_2(k) + b_2 u_2(k), x_2(0) = 0$$

$$x_3(k+1) = A_1 x_3(k) + A_2 [x_1(k) \otimes x_2(k) + x_2(k) \otimes x_1(k)] + D_1 x_2(k) u_1(k) + D_2 x_1(k) u_2(k) + b_3 u_1(k) u_2(k), x_3(0) = 0$$

$$y(k) = c_1 x_3(k) + c_2 [x_1(k) \otimes x_2(k) + x_2(k) \otimes x_1(k)] \quad (114)$$

Bu eşitlikler kümesi daha basit bir forma sokulabilir, ancak boyutlardaki önemli giderlerde $x_3(k)$ için Carleman doğrusallığı fikrinin uygulanmalıdır. Şimdi uygulayalım,

$$x_3(k) = x_1(k) \otimes x_2(k) + x_2(k) \otimes x_1(k) \quad (115)$$

Daha sonra doğru olan hesaplama $x_3(k)$ yı memnun eder,

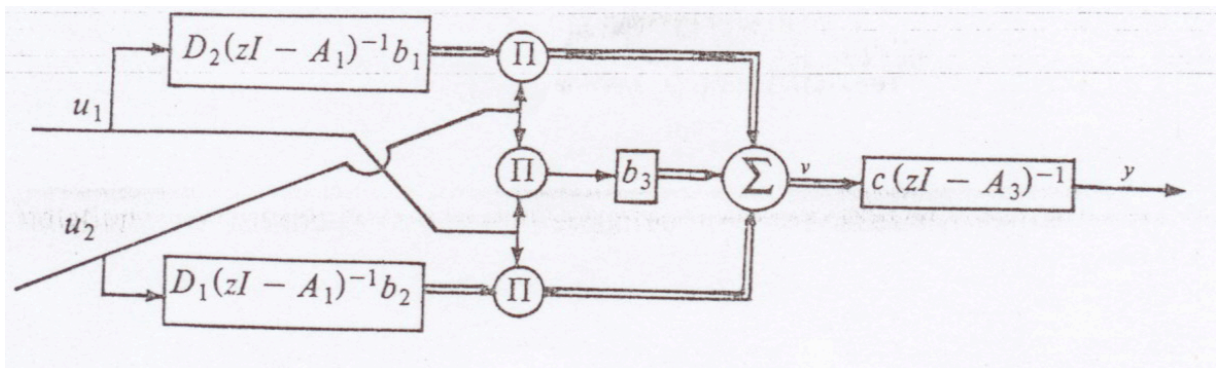
$$x_3(k+1) = A_1 \otimes A_1 x_3(k) + [A_1 \otimes b_1 + b_1 \otimes A_1] x_2(k) u_1(k) + [A_1 \otimes b_2 + b_2 \otimes A_1] x_1(k) u_2(k) + [b_1 \otimes b_2 + b_2 \otimes b_1] u_1(k) u_2(k) \quad (116)$$

Burada $x_3(0) = 0$ dır. Şimdi

$$z_3(k) = \begin{bmatrix} x_3(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} \quad (117)$$

Şimdi bunları bütünleştirelim,

$$\begin{aligned} z_3(k+1) = & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_1 \otimes A_2 \end{bmatrix} z_3(k) + \begin{bmatrix} D_1 \\ A_1 \otimes b_1 + b_1 \otimes A_1 \end{bmatrix} x_2(k) u_1(k) \\ & + \begin{bmatrix} D_2 \\ A_1 \otimes b_2 + b_2 \otimes A_1 \end{bmatrix} x_1(k) u_2(k) \\ & + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_1 \otimes b_2 + b_2 \otimes b_1 \end{bmatrix} u_1(k) u_2(k) \end{aligned} \quad (118)$$



Şekil 6.1 Bir bilinear giriş/çıkış sisteminin bağlantılar arası gerçekleştirimi.

Elbetteki çıkış eşitliği şu formda yazılabilir

$$y(k) = [c_1 \quad c_2]z_3(k) \quad (119)$$

Özet olarak daha basit bir gösterimle, bilinear giriş/çıkış sistemini eşitlik (110) dan da bir durum eşitliği formu tarafından tanımlanabilir.

$$x_1(k+1) = A_1x_1(k) + b_1u_1(k), x_1(0) = 0$$

$$x_2(k+1) = A_1x_2(k) + b_2u_2(k), x_2(0) = 0$$

$$x_3(k+1) = A_3x_3(k) + D_1x_2(k)u_1(k) + D_2x_1(k)u_2(k) + b_3u_1(k)u_2(k), x_3(k) = 0$$

$$y(k) = cx_3(k)$$

Eşitlik (120) nin yapısal formu Şekil 6.1 de bağlantılar arası şekilde gösterilmiştir. Burada vektör ölçüleri çift okla gösterilmiştir. Elbetteki bu bağlantılar arası gerçekleştirimi durum eşitliği (120) nin boyutundan en küçük değerden uzaktır ve $3n + n^2$ dir. Boyutdaki bazı azalmalar azaltılmış Kronecker ürünlerinin kullanılmasıyla elde edilmiş olabilir fakat sonuç hala en küçük değerden hala uzaktır.

Eşitlik (110) tarafından tanımlanan bir bilinear giriş/çıkış sisteminin somut bir şekli Şekil 6.1 de gösterilen bağlantılar arası yapıdan türetilebilir. Bu türetme çıkış işaretine ulaşınca kadar çeşitli kopya sinyaller boyunca benzer yordamlarla ilgilidir. Açıkça $k > 0$ için,

$$\begin{aligned} D_2x_1(k)u_2(k) &= \sum_{j_2=0}^{k-1} D_2A_1^{k-j_2-1}b_1u_1(j_2)u_2(k) \\ D_1x_2(k)u_1(k) &= \sum_{j_2=0}^{k-1} D_1A_1^{k-j_2-1}b_2u_1(k)u_2(j_2) \\ v(k) &= D_2x_1u_2(k) + D_1x_2(k)u_1(k) + b_3u_1(k)u_2(k) \\ y(k) &= \sum_{j_1=0}^{k-1} cA_3^{k-j_1-1}v(j_1) \end{aligned} \quad (121)$$

Bu eşitlikleri beraber uygularsak bize giriş/çıkış formülünü verir.

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{j_1=0}^{k-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} cA_3^{k-j_1-1}D_2A_1^{j_1-j_2-1}b_1u_1(j_2)u_2(j_1) + \sum_{j_1=0}^{k-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} cA_3^{k-j_1-1}D_1A_1^{j_1-j_2-1}b_2u_1(j_1)u_2(j_2) \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{k-1} cA_3^{k-j_1-1}b_3u_1(j_1)u_2(j_1) \end{aligned} \quad (122)$$

Bundan dolayı eşitlik (110) da tanımlanan bir bilinear giriş/çıkış sistemi şu formda belirtilebilir,

$$y(k) = \sum_{j_1=0}^{k-1} \sum_{j_2=0}^{k-1} h(k-j_1, k-j_2)u_1(j_1)u_2(j_2) \quad (123)$$

Burada, eşitlik (122)'nin yeniden düzenlenmesi ile çekirdek şöyle verilebilir

$$h(i_1, i_2) = \begin{cases} cA_3^{i_1-1} D_1 A_1^{i_2-i_1-1} b_2, 0 < i_1 < i_2 \\ cA_3^{i_2-1} D_2 A_1^{i_1-i_2-1} b_1, 0 < i_2 < i_1 \\ cA_3^{i_1-1} b_3, 0 < i_1 < i_2 \\ 0, otherwise \end{cases} \quad (124)$$

Ek olarak bir giriş/çıkış sistemini belirtmek için, eşitlik (123) sıradan ve durağan bir sisteme kolaylıkla uyar.

2 değişkenli z-dönüşümünü kullanarak, bilinear giriş/çıkış sistemleri için bir *transfer fonksiyon* gösterimi tanımlanabilir.

$$H(z_1, z_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h(i_1, i_2) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \quad (125)$$

Çekirdek için özel yapı eşitlik (124) de gösterilmiştir. Bu ayrıca transfer fonksiyonu için özel yapı anlamında gelir. Eşitlik (124) 'ü eşitlik (125) de yerine koyarsak , şunu verir,

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2) &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} cA_3^{i_1-1} D_1 A_1^{i_2-i_1-1} b_2 z_1^{-i_1} z_1^{-i_2} \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} cA_3^{i_2-1} D_2 A_1^{i_1-i_2-1} b_1 z_1^{-i_1} z_1^{-i_2} \\ &+ \sum_{i_1=i_2=1}^{\infty} cA_3^{i_1-1} b_3 z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \end{aligned} \quad (126)$$

Hesaplamanın kalanını şekillerle ifade edebilmek için eşitlik (126) nın sağ tarafı üzerinde detaylı bir çalışma yapacağım. İndisi i_2 olan toplam işaretini $j_2 = i_2 - i_1 - 1$ şu kimliği kullanarak değiştirdiğimizde,

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^{iz^{-i}} = z(zI - A)^{-1} \quad (127)$$

Bu şu şekilde yeniden yazılmasına izin verir:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} cA_3^{i_1-1} D_1 A_1^{j_2} b_2 z_1^{-i_1} z_2^{-(j_2+i_1+1)} &= \sum_{i_1=1}^{\infty} cA_3^{i_1-1} D_1 (z_2 I - A_1)^{-1} b_2 (z_1 z_2)^{-i_1} \\ &= c(z_1 z_2 I - A_3)^{-1} D_1 (z_2 I - A_1)^{-1} b_2 \end{aligned}$$

Bu çeşitli hesaplamaları eşitlik (126) da kalan iki terimde uygularsak kazanç,

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2) &= c(z_1 z_2 I - A_3)^{-1} D_1 (z_2 I - A_1)^{-1} b_2 \\ &+ c(z_1 z_2 I - A_3)^{-1} D_2 (z_1 I - A_1)^{-1} b_1 + c(z_1 z_2 I - A_3)^{-1} b_3 \end{aligned} \quad (128)$$

Bundan dolayı, eşitlik (110) un durum eşitliği tarafından tanımlanabilen bir bilinear giriş/çıkış sisteminin transfer fonksiyonu için genel bir formu elde edilir.

Bu konunun daha fazlası bölüm 6.8 anlatıldığından, bu konunun devamını oraya bırakıyoruz. Bu noktada bu tür sistemlerin Volterra/Wiener gösterimi için geliştirilmiş benzer metodlar kullanılarak çalışıldığı açık olmalı. Dönüşüm alanındaki giriş/çıkış hesaplamaları değişkenlerin işbirliği (association-of-variables) tekniği ile ilgilidir. Belli giriş sinyali türleri için açık karşılık formülleri türetilebilir. Transfer fonksiyonunun (yada çekirdeğin) yapısal formunu bağlantılar arası yapı cinsinden gerçekleştirimini temel şartları kullanarak tanımlayabiliriz. Sonuç olarak okuyucu kesinlikle şunun farkındadır, $u_1(k) = u_2(k) = u(k)$ şeklinde düzenlemeyle bilinear giriş/çıkış sistemi 2. dereceden homojen bir sisteme dönüşür.

6.7. İki Boyutlu Doğrusal Sistemler

Çok boyutlu doğrusal sistemlerle ilgili bu teori, doğrusal olmayan sistemlerin gösterimi için kullanılan Volterra/Wiener'e benzemektedir. İki boyutlu, durağan, eş zamanlı doğrusal sistemler bugün üzerinde en çok çalışılan konuları oluşturmaktadır. Bu teoremin temellerini tartışacağız ve sırasıyla doğrusal olmayan sistem teorileri ile ilgili bağlantıları ortaya koyacağız.

İki boyutlu sabit, eş zamanlı doğrusal bir sistem için temel giriş/çıkış gösterimi şu şekilde yazılabilir:

$$y(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} h(k_1 - i_1, k_2 - i_2) u(i_1, i_2), k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (129)$$

Burada girdi $u(k_1, k_2)$ ve çıktı $y(k_1, k_2)$ tamsayı argümanlar için tanımlanmış gerçek iki boyutlu işaretlerdir, fakat her ikisinde negatifse, sıfır olarak kabul edilirler. Doğrusallık kolayca sağlanır: açık gösterimde, cevap her α ve β değeri için $\alpha u_1(k_1, k_2) + \beta u_2(k_1, k_2)$ $\alpha y_1(k_1, k_2) + \beta y_2(k_1, k_2)$ dir. Bir gecikmeli değişmez sabit özelliği için durağanlık uyumu eşitlik (129) un içeriğindedir, şu şekilde ifade edilebilir. Eğer $u_2(k_1, k_2) = u_1(k_1 - K_1, k_2 - K_2)$ ise tüm negatif olmayan K_1, K_2 tamsayı çifti için $y_2(k_1, k_2) = y_1(k_1 - K_1, k_2 - K_2)$. Burada nedensellikten bahsedilemediği farkettik, bundan dolayı bazı belirsizlikler gösterimlerin içinde ifade edilmektedir.

2-değişkenli z-dönüşümünde Teorem 6.4 deki convolution özelliğini kullanarak şu giriş/çıkış gösterimini verir.

$$Y(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) U(z_1, z_2) \quad (130)$$

Burada $H(z_1, z_2) = Z[h(k_1, k_2)]$ ifadesi sistemin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. Giriş işaretinin çeşitli sınıfları için sistemin cevaplama özelliğinin araştırılması için daha önceki bölümlerden eşitlik (130) un nasıl kullanılacağı hemen açık hale getirilmelidir.

Örnek 6.10 En basit (sıfır olmayan) giriş sinyali birim pals girişidir. Bu iki boyutlu sistemlerde şu şekilde tanımlanır.

$$u_0(k_1, k_2) = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2 = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Eşitlik (129) dan cevap açıkça şu şekildedir.

$$Y(k_1, k_2) = h(k_1, k_2), k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Yada $U_0(z_1, z_2) = 1$ den dolayı

$$Y(z_1, z_2) = H(z_1, z_2)$$

Elbette ki bir digital filtre içeriğinde sistemin değişmeyen-durum frekans cevap verme özelliği en önemlidir. Bu konu çalışmak için daha kolaydır ve bundan dolayı bu görev bölüm 6.9 da anlatılacaktır.

Durum eşitlik gösteriminin çeşitli tipleri vardır ve bunlar iki boyutlu doğrusal sistemlerin benimsenen çalışmalarıdır. Burada genel bir formül ile çalışacağım.

$$\begin{aligned} x(k_1 + 1, k_2 + 1) &= A_1 x(k_1 + 1, k_2) + A_2 x(k_1, k_2 + 1) + B_1 u(k_1 + 1, k_2) + B_2 u(k_1, k_2 + 1) \\ y(k_1, k_2) &= c x(k_1, k_2), k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (131)$$

Burada $x(k_1, k_2)$ bir $n \times 1$ vektördür. Bu eşitliği parça parça alırsak, ilk bazı k_1 ve k_2 değerleri için ilk koşullarını gösterir, daha uygun olarak sınır koşulları olarak adlandırılırlar, çözüm için $x(k_1, 0)$, $k_1 = 0, 1, \dots$ ve $x(0, k_2)$, $k_2 = 0, 1, \dots$ değerlerine ihtiyaç vardır. Sınır şartlarının bu çarpımı $x(k_1, k_2)$ nin sistem için bir durum vektörü olmadığını belirtir. $x(k_1, k_2)$ nin değeri ve giriş sinyali bilgileri $x(k_1 + K_1, k_2 + K_2)$ nin değerini ifade etmek için yeterli değildir. Sıralanmış işlemlerin içeriğinde ifade edilen tek $x(k_1, k_2)$ değeri sıranın ‘durum’ unu belirtmez. Daha doğrusu $x(k_1, k_2)$ sıralama içerisinde gerektiği takdirde yinelemeyi verir. Bundan dolayı $x(k_1, k_2)$ ‘i iki boyutlu sistem için bir *yerel durum vektörü* olarak adlandırıyorum. Ve n ’i sistemin yerel boyutu olarak adlandırıyorum.

İki boyutlu sistemler için yerel durum eşitliğinin formuna ulaşmak için özseziyel yollar vardır. Bu sezgi sistemin bir sıralama işlemi olarak görülmesine bağlıdır, ve sıralamanın içinde genelleştirilmiş değerler tarafından çeşitli yöntemler hayal eder. Eşitlik (131) de motivasyonu sağlamak için bunlardan bir tanesine doğru gideceğim.

Örnek 6.11 Varsayalım ki $y(k_1, k_2)$ değerleri yatay ve dikey yinelemelerin kombinasyonu tarafından üretilmiş belli bir sıranın içinde. Şimdi $x_h(k_1, k_2)$ yerel yatay durum ve $x_v(k_1, k_2)$ de yerel dikey durum olsun, ve varsayalım ki yerel durum şu formülle üretiliyor.

$$\begin{aligned} x_h(k_1 + 1, k_2) &= A_1 x_h(k_1, k_2) + A_2 x_v(k_1, k_2) + B_1 u(k_1, k_2) \\ x_v(k_1, k_2 + 1) &= A_3 x_h(k_1, k_2) + A_4 x_v(k_1, k_2) + B_2 u(k_1, k_2) \\ y(k_1 + 1, k_2) &= c_1 x_h(k_1, k_2) + c_2 x_v(k_1, k_2), k_1, k_2 = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (132)$$

Elbette giriş sinyali $u(k_1, k_2)$ belirtilmelidir ve açıktır ki sınır değerleri de belirtilmelidir bunlar $x_h(0, k_2)$ ve $x_v(k_1, 0)$ (sıralamanın sol ve alt tarafı). Bu yerel durum eşitlikleri eşitlik (131) de yerine koyulduğunda $x(k_1, k_2)$ olarak şöyle tanımlanır.

$$x(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} x_h(k_1, k_2) \\ x_v(k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

Daha sonra daha açık olan şu hesaplamayı verir.

$$\begin{aligned} x(k_1+1, k_2+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x(k_1+1, k_2) + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k_1, k_2+1) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k_1, k_2+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k_1+1, k_2) \\ y(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Eşitlik (132) de bu durum eşitlik (131) in özel bir durumu olarak gösterilmiştir .

Transfer fonksiyonu eşitlik (131) deki yerel durum eşitliği benzetmek için kolaylıkla Problem 6.3. ün sonucunu kullanarak kolayca hesaplayabiliriz. Sıfır sınır koşulları için durum eşitliği dönüşüm-alan formunda şöyle yazılır :

$$z_1 z_2 X(z_1, z_2) = A_1 z_1 X(z_1, z_2) + A_2 z_2 X(z_1, z_2) + B_1 z_1 U(z_1, z_2) + B_2 z_2 U(z_1, z_2) \quad (133)$$

Çözümü şunları verir,

$$X(z_1, z_2) = (z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} (B_1 z_1 + B_2 z_2) U(z_1, z_2) \quad (134)$$

Böylece giriş/çıkış ilişkisi şu formu alır:

$$Y(z_1, z_2) = c(z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} (B_1 z_1 + B_2 z_2) U(z_1, z_2) \quad (135)$$

Bundan dolayı transfer fonksiyonu eşitlik (131)'e benzer şekilde şöyle yazılır:

$$H(z_1, z_2) = c(z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} (B_1 z_1 + B_2 z_2) \quad (136)$$

Yerel durum eşitliğinin dönüşüm-alan çözümünden, bir 'sıra-alan' çözümü aşağıdaki gibi türetilir. Eşitlik (127) nin bir kimliğini kullanarak eşitlik (134) 'ün ters matrisini şu formda yazmamıza izin verir.

$$\begin{aligned} (z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} (A_1 z_1 - A_2 z_2)^i (z_1 z_2)^{-(i+1)} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} A^{i_1, i_2} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \end{aligned} \quad (137)$$

Burada A^{i_1, i_2} iki boyutlu geçiş matrisi olarak adlandırılır. Eşitlik (137) nin terimlerinin katsayıları A^{i_1, i_2} nin ilk bazı değerlerini verir.

$$\begin{aligned} A^{0, i} &= A^{i, 0} = 0, \quad i=0, 1, 2, \dots \\ A^{1, 3} &= A_1^3 \\ A^{2, 1} &= A_2, \quad A^{3, 1} = A_2^2, \quad A^{2, 2} = A_1 A_2 + A_2 A_1 \end{aligned} \quad (138)$$

Şimdi convolution özelliğinden, bölüm 6.2 deki Teorem 6.4 de bulunan eşitlik (137) ile eşitlik (134) ün bağlanması yerel durum için bir ifade elde edilebilir. İlk not

$$\begin{aligned}
X(z_1, z_2) &= \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} A^{i_1, i_2} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \right) (B_1 z_1 + B_2 z_2) \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} A(j_1, j_2) z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} z A^{i_2, i_1} B_1 u(j_1, j_2) z_1^{-(i_1+j_1)} z_2^{-(i_2+j_2)} \\
&\quad + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} z_2 A^{i_1, i_2} B_2 u(j_1, j_2) z_1^{-(i_1+j_1)} z_2^{-(i_2+j_2)}
\end{aligned} \tag{139}$$

j_1 yerine $k_1 = j_1 + i_1$ ve j_2 yerine $k_2 = j_2 + i_2$ yerleştirirsek ve giriş sinyalinin ‘bir-tarafsız’ ın kullanılır yapması şunu verir ,

$$\begin{aligned}
X(z_1, z_2) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} z_1 A^{i_1, i_2} B_1 u(k_1 - i_1, k_2 - i_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} \\
&\quad + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} z_2 A^{i_1, i_2} B_2 u(k_1 - i_1, k_2 - i_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}
\end{aligned} \tag{140}$$

Şimdi çözümü takip eder.

$$x(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} (A^{i_1+1, i_2} B_1 + A^{i_1, i_2+1} B_2) u(k_1 - i_1, k_2 - i_2) \tag{141}$$

Eşitlik (131) in yerel durum eşitliğinin bazı yapısal özellikleri vardır bunlar tek boyutlu doğrusal sistem teorisindeki özelliklere benzer özelliklerdir. Şekillendirmek için yerel durum eşitliğinin erişilebilirlik ve gözlemlenebilirliklerini kısaca anlatacağım.

Tanım 6.3 Yerel durum eşitliğinin bir x_1 durumu erişilebilirlik durumu olarak çağrılır. Eğer bazı $K_1, K_2 < \infty$, $x(K_1, K_2) = x_1$ için bir giriş sinyali varsa bu erişilebilirdir. Eğer her durumu erişilebilir ise yerel durum eşitliği erişilebilir olarak adlandırılır.

Eşitlik (141)den x_1 , sadece ve sadece şu şekilde erişilebilirdir.

$$x_1 \in \text{span}\{(A^{i_1+1, i_2} B_1 + A^{i_1, i_2+1} B_2) \mid i_1, i_2 = 0, 1, \dots\} \tag{142}$$

Yardımcı Önerme 6.3 iki boyutlu durum geçişi için matris eşitlik (137) de tanımlanmıştır.

$$\text{span}\{A^{i_1, i_2} \mid i_1, i_2 = 0, 1, \dots\} = \text{span}\{A^{i_1, i_2} \mid i_1, i_2 = 0, 1, \dots, n\} \tag{143}$$

İspat Eşitlik (137) de klasik adjoint-over-determinant formu ters matrisi ifade eder.

$$\text{adj}(z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2) = \det(z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2) \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} A^{i_1, i_2} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2}$$

Bu ifadenin sol tarafında z_1 ve z_2 nin pozitif olmayan kuvveti yoktur. Sağ tarafta $\det(z_1 z_2 I - A_1 z_1 - A_2 z_2)$ z_1 deki ve z_2 deki n in , çift toplam işaretiindeki sıfır olmayan terimleri

$i_1, i_2 \geq 1$ için bir polinom derecesidir. Bundan dolayı eşitlik katsayıları $z_1^{-i_1} z_2^{-i_2}$,

$i_1 i_2 \geq 0$, gösterirki $i_1 > n$ yada $i_2 > n$ olduğu zaman hiçde önemsiz olmayan A^{i_1, i_2} matrisinin doğrusal kombinasyonu vardır. Açıkca bu sonuç eşitlik (143) 'ü içerir.

Teorem 6.10 Yerel durum eşitliği (131) sadece ve sadece matris aşağıdaki gibiye erişilebilirdir.

$$\left[B_1 \mid B_2 \mid A^{1,1} B_2 \mid A^{2,1} B_1 + A^{1,2} B_2 \mid \dots \mid A^{n+1,n} B_1 + A^{n,n+1} B_2 \right] \quad (144)$$

İspat seyrek gösterilmesine rağmen, eşitlik (144) deki matris $(A^{i_1+1, i_2} B_1 + A^{i_1, i_2+1} B_2)$ ile $i_1 \leq n, i_2 \leq n$ formunun tüm $n \times 1$ vektörleri kolon olarak içerir. Bundan dolayı, sonuç yardımcı önerme 6.3 ve durum erişilebilirlik şartı(142) nın basit sonucudur.

Yerel durum eşitliği (131) in uygun gözlemlenebilirlik tanımı varolmayan sınır şartlarına bağlıdır.

Tanım 6.4 Yerel durum eşitliği (131) , sıfır giriş kimliği ile çıkış kimliği sıfır olduğunda sıfır olmayan sınır koşulu kümesi yoksa gözlemlenebilir olarak adlandırılır.

Şartların gelişimini gözlemlenebilir olarak tanımlanması eşitlik (131) in girişler ve sıfır olmayan sınır şartları için cevabının analizine bağlı olabilir. Böyle bir analiz teorem 6.11'e önderlik eden bir yardımcı önerme 6.3'ün bir uygulaması tarafından takip edilir. İspatın kalanı okuyucuya kalmaktadır.

Teorem 6.11 Yerel durum eşitliği (131) eğer matris aşağıdaki gibiye gözlemlenebilirdir.

$$\begin{bmatrix} c \\ cA^{1,2} \\ cA^{2,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ cA^{n,n} \end{bmatrix} \quad (145)$$

Bu yazıların yazıldığı sıralarda yerel durum eşitliği (131) cinsinden iki boyutlu doğrusal sistemlerin anlaşılması tamamen mümkün değildi. Eşitlik (136) danda açıkca anlaşılacağı gibi anlaşılabilirliği için verilen $H(z_1, z_2)$ transfer fonksiyonun gerçek oransallığı gerekli bir şarttır. Daha ilerde diğer gerekli şart olan $H(z_1, z_2)$ nin pay ve payda polinomu $z_1 = z_2 = 0$ olduğunda sıfır olmak zorundadır. Diğer bir deyişle, bu polinomlar sıfır olmayan sabit terimlere sahip olmak zorunda değildir. Diğer gerekli şartlar da ayrıca yetersizdir, bir genel transfer fonksiyonu tarafından anlaşılabilir bir yapılmayla bir ispat verir. Böyle anlaşılabilir bir şey yazmak oldukça sinir bozucu olabilir, belirsiz olan yerleri bir örnekle göstereceğim.

Örnek 6.12 Aşağıda tanımlanan iki boyutlu doğrusal sistemi düşününüz.

$$H(z_1, z_2) = \frac{b_1 z_1 + b_{01} z_2}{z_1 z_2 + a_{10} z_1 + a_{01} z_2}$$

Bu sistem için bir basit hesaplama gerçekleştirilebilirlik gösterir.

$$\begin{aligned} x(k_1 + 1, k_2 + 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{01} & -a_{10} \end{bmatrix} x(k_1 + 1, k_2) + \begin{bmatrix} -a_{01} & -a_{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k_1, k_2 + 1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k_1 + 1, k_2) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k_1, k_2 + 1) \\ y(k_1, k_2) &= [b_{01} \quad b_{10}] x(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Burada tüm ilk şartlar sıfırdır.

Elbette iki boyutlu doğrusal sistemler için en küçük boyutlu gerçekleştirimin yapılmasının çok ilgili ve daha fazla alan bırakılmış olmalıdır. Tek boyutlu durumda, erişilebilirlik ve gözlemlenebilirlik ve erişilebilirlik en küçük gerçekleştirim teorisinin geliştirilmesinde faydalı araçlardır. Ancak aşağıdaki örnek iki boyutlu durumlar için daha karmaşık olduğunu göstermektedir ve belkide daha önce tanımları verilen erişilebilirlik ve gözlemlenebilirlik en iyi seçenek değildir.

Örnek 6. 13 Transfer fonksiyonu için.

$$H(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 + z_1 + z_2}$$

Örnek 6.12 de verilen gerçekleştirimi olur.

$$\begin{aligned} x(k_1 + 1, k_2 + 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(k_1 + 1, k_2) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k_1, k_2 + 1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k_1 + 1, k_2) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k_1, k_2 + 1) \\ y(k_1, k_2) &= [1 \quad -1] x(k_1, k_2) \end{aligned}$$

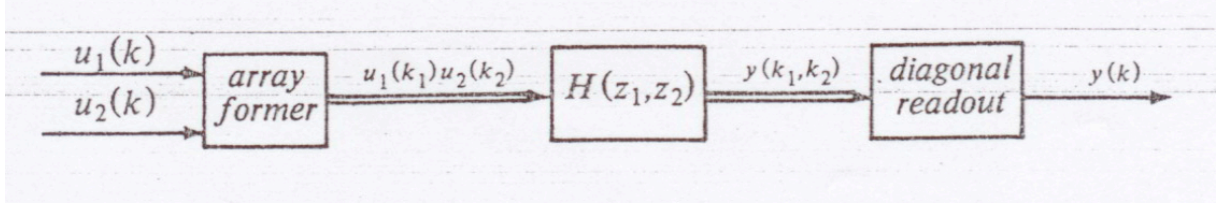
Bu hızlı hesaplama, bu yerel durum eşitliğinin erişilebilir ve gözlemlenebilir olduğunu göstermiştir. Aşağıda verilen gerçekleştirimden beri en küçük değildir.

$$x(k_1 + 1, k_2 + 1) = -x(k_1 + 1, k_2) - x(k_1, k_2 + 1) + u(k_1 + 1, k_2) - u(k_1, k_2 + 1)$$

$$y(k_1, k_2) = x(k_1, k_2)$$

Sonuç olarak iki boyutlu doğrusal bir sistem kullanarak modellenen bilinear giriş/çıkış sistemini göstermek çok basittir. Bu sistemin iki sınıfı için dönüşüm-alan giriş/çıkış eşitliğinin karşılaştırılmasından daha fazlasını içermez. Böyle bir karşılaştırma bilinear giriş/çıkış sistemleri transfer forksiyonu $H(z_1, z_2)$ şöyle görünebilir. $u_1(k)$ ve $u_2(k)$ giriş işaretlerinden, $u_1(k_1, k_2) = u_1(k_1)u_2(k_2)$ array formudur. $y_1(k_1, k_2)$ sırasını elde etmek için $H(z_1, z_2)$ transfer fonksiyonu ile iki boyutlu doğrusal sistem ile işleriz. Daha sonra

$y(k) = y(k, k)$, düzenlersek, $y(k)$ sıranın köşegeni olur. Bu durum Şekil 6.2 de şematik olarak belirtilmiştir.



Şekil 6.2 Bir bilinear giriş/çıkış sisteminin, iki boyutlu bir doğrusal sistem kullanarak ifade edilmesi

7. BÖLÜM

KİMLİK

Kimlik terimi çok geniş anlam doğrultusunda giriş/çıkış deneylerinden bilinmeyen sistemlerin Volterra/Wiener gösteriminde çekirdek veya transfer fonksiyonları hakkında bilgi alma anlamına gelmek olarak kullanılacaktır. Bu bilgi genellikle kısmi nümerik bağımsız değişken değerleri için çekirdek veya transfer fonksiyonlarının değer biçimlerinde olacak. Bununla birlikte, ben ayrıca, bilinmeyen sistemler için kısmi yapı kabul edildiği zaman veya bilinen fonksiyonların bilimsel terimleri içinde çekirdeklerin genişmesi kabul edildiği zaman meydana çıkan, bazı basit parametre kimlik problemlerini tartışacağım. Yapılacak çoğu kalıntılar tartışmanın gidişatında netleşecektir.

Durağan polinom sistemler üzerinde düşünülecek ve giriş/çıkış deneyleri 5. Bölüm veya bölüm 6.5'de üzerinde düşünülen tiplerden birinin giriş sinyallerinin uygulamasını içerecek. Uygunluk sorunu olarak, bazen tartışma sürekli-zaman sistemleri terimlerinde ve bazen ayrık-zaman sistemlerinde olacaktır.

7.1 Giriş

Genel giriş/çıkış deneyinden bilinmeyen sistem için çekirdek değerleri belirleme bir lineer(doğrusal) problemidir. Bu ayrık zaman durumu için son derece basitçe gösterir, polinom sistem nerede, teknik basitlik için, sistemin sınırlı M hafızaya sahip olduğu ve 0 derece teriminin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Tek yanlı giriş sinyalleri kabul etmek, üçgensel çekirdek gösterimi tarafından tarif edildiği gibi

$$y(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{i_1=0}^M \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_n=0}^{i_{n-1}} h_{ntri}(i_1, \dots, i_n) u(k - i_1) \dots u(k - i_n) \quad (1)$$

Şimdi giriş sinyal değerleri $u(0), \dots, u(K)$ için, çıkış sinyal değerlerine ilişkin $y(0), y(K)$ 'nın bilindiğini varsay. Sonra bu (1)'den bilinmeyen çekirdek değerleri terimlerinde lineer matris eşitliği yazmaya kadar doğrudur:

$$Y = HU \quad (2)$$

nerede

$$Y = [y(0) \dots y(K)]$$

$$H = [h_1(0)h_1(1) \dots h_1(M)h_{2tri}(0,0)h_{2tri}(1,0)h_{2tri}(1,1) \dots h_{Ntri}(M, \dots, M)]$$

ve

(5d)
(4)

$$U = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots \\ 0 & u(0) & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ u^2(0) & u^2(1) & \\ 0 & u(0)u(1) & \\ 0 & u^2(0) & \\ 0 & 0 & \\ u^N(0) & & \\ 0 & & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (3)$$

Eğer K U 'nun kare matris olduğu gibiyse ve eğer U ters çevrilebilirse, o zaman çekirdek değerlerinin $H = YU^{-1}$ 'da verildiği şimdi açıktır. Eğer K bu değerden geniş veya küçükse veya eğer U ters çevrilebilir değilse; o zaman en küçük kareler teknikleri, sözde dönüşüm gibi, çekirdek değerleri için yaklaşım elde etmede kullanılabilir.

Bu gelişmeler çekirdek belirleme probleminin doğasını gösterdiği halde, gereken boyutların çoğu ilgi durumlarında çok yaygın olduğu netleştirilmelidir. **Örneğin** $(M + 1)^n$ **düzeninde** M **bellekle** n **derece çekirdek değerler vardır**. Sonuç olarak $Y = HU$ lineer denklem çözümü oldukça zor olabilir. Bu dikkat edilecekler bilinen fonksiyon terimlerinde çekirdek genişlemesini kapsayarak yaklaşım teknikleri girişine doğal olarak yol açar.

(1)'deki üçgensel çekirdeklerin her birinin bilinen fonksiyonların ürünlerinin lineer kombinasyonu $\phi_0(k), \phi_1(k), \dots, \phi_J(k)$ gibi gösterimlenebileceğinin varsayıldığını farz et. Özellikle,

$$h_{ntri}(k_1, \dots, k_n) = \sum_{j_1=0}^J \sum_{j_2=0}^J \dots \sum_{j_n=0}^J \alpha_{j_1 \dots j_n} \phi_{j_1}(k_1) \dots \phi_{j_n}(k_n)$$

olduğu varsayılmıştır. Sonra (1)

$$y(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{j_1=0}^J \dots \sum_{j_n=0}^J \alpha_{j_1 \dots j_n} \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_n=0}^{i_n-1} \phi_{j_1}(i_1) \dots \phi_{j_n}(i_n) u(k - i_1) \dots u(k - i_n)$$

biçiminde veya benzer bir gösterimde,

$$y(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{j_1=0}^J \dots \sum_{j_n=0}^J \alpha_{j_1 \dots j_n} \phi_{j_1 \dots j_n}(k)$$

$\Phi_{j_1 \dots j_n}(k)$ açık tanımıyla tekrar yazılabilir. Bilinen giriş sinyali $u(0), u(1), \dots, u(K)$ ve bilinen ilgili yanıt $y(0), y(1), \dots, y(K)$ için $\phi_{j_1 \dots j_n}(k)$ ve bilinen katsayılar $\alpha_{j_1 \dots j_n}$ için lineer denklem

(8)

(10)

(9)

seti kazançları (6) bilinmiştir. Eğer J küçükse, o zaman denklem sisteminin boyutu (2)'nin boyutundan çok daha küçüktür. Yani, çekirdek değerlerinden daha az genişleme katsayıları bulunabilir.

İleri araştırma genel yaklaşım detayları okuyucuya bırakılacaktır. Bölümün geri kalanı için giriş sinyallerinin özel tiplerine dayanan kimlik metotlarıyla ilgileneceğim.

7.2 Tepki Girişlerini Kullanarak Kimlik

Tepki cevabına dayanan sürekli zaman lineer sistem kimliği genişçe tartışılır, zaman kullanılsa bile ve böylece lineer olmayan durumlar için ilgili durumları tartışmak gerekli görülür. Ancak okuyucu teorik tartışmanın uygulama için sadece sınırlı potansiyele sahip olduğuna dikkat göstermeli. (7) tarafından

$$y(t) = \int_0^t h_{nsym}(t - \sigma_1, \dots, t - \sigma_n) u(\sigma_1) \dots u(\sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n$$

tanımlanmış n derece bir homojen sistem varsay. Sonra bölüm 5.1'den, $u_0(t) = \delta_0(t)$ 'e yanıt $y_0(t) = h_{nsym}(t, \dots, t)$ 'dir. $p = 2, 3, \dots, n$ için, $T_1, \dots, T_{p-1}$ 'in belirgin pozitif numaralar olduğu yerde

$$u_{p-1}(t) = \delta_0(t) + \delta_0(t - T_1) + \dots + \delta_0(t - T_{p-1})$$

'a cevap; $\sum_m$ 'in bütün tam sayı $m_1, \dots, m_p$ değerleri üzerinde toplamı p kat olduğu yerde, şöyle ki $0 \leq m_i \leq n$, ve $m_1 + \dots + m_p = n$:

$$y_p(t) = \sum_m \frac{n!}{m_1! \dots m_p!} h_{nsym}(t, \dots, t; \dots; t - T_{p-1}, \dots, \dots, t - T_{p-1})$$

Bu yanıt formülleri temelinde, homojen sistemler için kimlik stratejisi 2.derece durum için açıklamak kolaydır. 2.derece sistem için $u_0(t)$ ve $u_1(t)$ 'e cevaplar, sırasıyla

$$y_0(t) = h_{2sym}(t, t)$$

$$y_1(t) = h_{2sym}(t, t) + h_{2sym}(t, t - T_1) + h_{2sym}(t - T_1, t - T_1)$$

'dır. Böylece eşit argümanlarda simetrik çekirdek değerleri $y_0(t)$ değerleri tarafından doğrudan verilmiştir. İki belirgin argümandan herhangi birinde simetrik çekirdek değerini belirlemek için, $t_1 > t_2$ ile t_1 ve t_2 'yi söyle, sadece $T_1 = t_1 - t_2$ alındığı için (10) basitçe bunu verir:

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

(15)

$$h_{2sym}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} [y_1(t_1) - y_0(t_1) - y_0(t_2)]$$

Bu çeşit analizler n derece homojen sistemleri genelleştirebilir. Yani belirgin argümanlarda sistem çekirdek değerleri (8)'de bulunabilir. Genel hesaplama kesin sonuçları dağınıktır ve ben bu yüzden onları motive olmuş okuyuculara ve literatüre bırakacağım.

Henüz kapsanılan hesaplama çeşidi polinom sistem durumunda da kullanılabilir. 2 derece durum tekrarı gelişmeyi gösterecek.

$$y(t) = \int_0^t h_1(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma + \int_0^t h_{2sym}(t - \sigma_1, t - \sigma_2)u(\sigma_1)u(\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2$$

tarafından tanımlanmış bir sistem düşün. (8)'den $u_0(t)$ ve $u_1(t)$ 'ye cevaplar aşağıda listelenmiştir:

$$y_0(t) = h_1(t) + h_{2sym}(t, t)$$

$$y_1(t) = h_1(t) + h_1(t - T_1) + h_{2sym}(t, t) + 2h_{2sym}(t, t - T_1) + h_{2sym}(t - T_1, t - T_1)$$

Şimdi, belirlenmiş $t_1 > t_2$ için $h_{2sym}(t_1, t_2)$ 2 derece çekirdek değerinin nasıl belirleneceğini göstermek için, 2 derece homojen durum gibi ilerleyebilirim. $T_1 = t_1 - t_2$ ayarlamak basit bir hesaplama verir

$$h_{2sym}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} [y_1(t_1) - y_0(t_1) - y_0(t_2)]$$

Fakat 1 derece çekirdekten ne haber? Bu çekirdeğin değerlerinin eşit argümanlarda 2 derece çekirdek değerlerinden ayrılması gerektiği (13)'den açıktır. İnterpolasyon (ara değerlendirme) sorunu burada meydana çıkar ve $2u_0(t)$ 'nin

$$y_2(t) = 2h_1(t) + 4h_{2sym}(t, t)$$

cevabını ürettiğini bildirmek için bir yaklaşımdır. Sonra $y_0(t)$ ve $y_2(t)$ vektör formunda yazılabilecek bir denklem kümesi üretir

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_{2sym}(t, t) \end{bmatrix}$$

Ürünlerin çözümü

$$h_1(t) = 2y_0(t) - \frac{1}{2}y_2(t)$$

$$h_{2sym}(t, t) = -y_0(t) + \frac{1}{2}y_2(t)$$

Böylece, bu çekirdek değer tipleri $t \geq 0$ olduğu herhangi bir değerde elde edilebilir.

Yüksek derece polinom sistemler için, bu analizler devam ettirilebilir. Fakat ayrıntılar artarak titizlik ister hale gelir ve İnterpolasyon (ara değerlendirme) fikri çeşitli ağırlık tepkilerini kapsayarak bir fizibilite bakış açısından artarak verimsiz hale gelir. Böylece daha az şiddetli giriş sinyalleriyle birleşmede benzer fikirler meydana çıktığı halde ben konuyu burada bırakıyorum. Bu simetrik çekirdek değerlendirmelerinin nasıl kullanılması gerektiği sorusu eldeki birçok duruma dayanır. Tarih koyma uygulamalarının çoğunda, yeterli değerler çekirdek çizimleri yapmak için elde edilmiştir ve bunlar sistemin karakteristiğini belirlemek için analiz edilmiştir. Kısa bir süre için analizlerin modellenmiş fiziksel sisteme çok fazla dayandığı genel olarak söylenebilir.

Genel bakış açısından, çekirdek değerlerinden bir sistem matematiksel model belirleme kabiliyeti kritik olarak bilinmeyen sistem hakkındaki varsayımlara dayanır. Örneğin, çekirdekler için fonksiyonel formda olduğu varsayılmalı, fonksiyonel formda hangi durumda parametreleri belirleme sistem kimlik işleminde başka bir adımdır. Bu çeşit varsayım bir bilinmeyen sistem için bir ara bağlantı yapısı varsayarak veya durum-denklemler gerçekleştirme kısmi tipi tarafından tanımlanabilen sistem varsayarak uygun olarak gerçekleştirilebilir. Mevcut genel durum hakkında kısaca söylenebileceği için, aklıma gelmişken, simetrik çekirdeğin her zaman en uygun gösterim seçeneği olmadığını gösteren basit bir örnekle tatmin olacağım.

Örnek 7.1 Bir sistemin bir diferansiyel denklem formunda $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) + d_0y(t)u(t)$ tanımlanabileceğinin bilindiğini farz et veya eşit olarak, çift lineer durum denklemi (A, D, b, c, R^2) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_0 & 0 \end{bmatrix} x(t)u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t)$$

Önemsiz durumlardan kaçınmak için, $b_0, d_0 \neq 0$ varsay. Problem 5.1'in sonuçları, genel formda birleşmede

$$h_{nreg}(t_1, \dots, t_n) = ce^{At_n} De^{At_{n-1}} D \dots e^{At_1} b, n = 1, 2, \dots$$

sistemin tepki-ünite cevabını $D^2 = 0$ ve $Db = 0$ 'ın kullanıldığı şeklindeki gerçeklerin olduğu yerde

$$y_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{nreg}(0, \dots, 0, t) = h_1(t) = ce^{At} b$$

formunda verir. Şimdi, c , A ve B , eşit olarak, α_0, α_1 ve b_0 'ın bu ünitedeki tepki yanıtından hesaplanabileceği lineer sistem teorisinden varsayılabilir. D 'yi belirlemek için, yani, d_0 , sistemin $\delta_0(t) + \delta_0(t - T), T > 0$ 'e cevabı kullanılacaktır. Bu cevap şu formda

$$y_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [h_{nreg}(0, \dots, 0, t) + h_{nreg}(0, \dots, 0, T, t - T) + h_{nreg}(0, \dots, 0, T, 0, t - T) + \dots + h_{nreg}(0, \dots, 0, t - T)] = ce^{At}b + ce^{A(t-T)}b\delta_{-1}(t - T) + ce^{A(t-T)}De^{AT}b\delta_{-1}(t - T)$$

c , A ve B bilindiği için d_0 'ın her $t > T$ için $y_1(t)$ değerinden hesaplanabileceğini göstermek için basit uygulama gibi bırakılmıştır.

7.3 Kararlı-Durum Frekans Yanıtına Dayanan Kimlik

Sinüsoid girişler için homojen ve polinom sistemlerin kararlı-durum cevabı başka kimlik problem yaklaşımı için temel sağlar. Fikirler transfer fonksiyon değerlerini bulmak için iyi bilinen lineer-sistem frekans yanıt metotları ile benzerdir. Spesifik olarak, $H(s)$ transfer fonksiyonu tarafından tanımlanmış bir oturmuş lineer sistem varsay. Sonra, bölüm 5.2'de takip eden gözden geçirme, onarmak için kompleks $H(i\omega)$ değeri, gerçek ω genliği ve $u(t) = 2A\cos(\omega t)$ 'a karar durum yanıtının fazını ölçerek belirlenebilir. Gerçekten, iki değerlendirmeye ölçülen kompleks numara $H(i\omega)$ 'nın kompleks eşleniği tarafından verilen $H(-i\omega)$ için belirlenebilir.

Tekrar simetrik transfer fonksiyon terimlerinde tanımlanan bir 2 derece homojen sistem dikkate alarak nonlineer sistemleri tartışmaya başlayacağım. Bölüm 5.2'den, $u(t) = 2A\cos(\omega t)$ 'a kararlı-durum yanıtı

$$y_{ss}(t) = 2A^2 H_{2sym}(i\omega, -i\omega) + 2A^2 |H_{2sym}(i\omega, i\omega)| \cos[2\omega t + \angle H_{2sym}(i\omega, i\omega)]$$

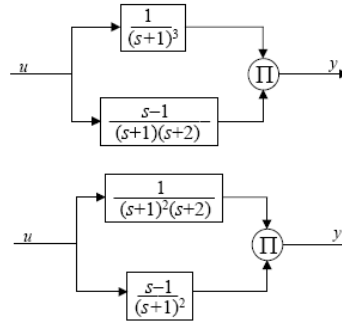
Böylece $H_{2sym}(i\omega, -i\omega)$ ve $H_{2sym}(i\omega, i\omega)$ değerleri belirlenebilir. Fakat bu eşsiz sistem transfer fonksiyonu belirlemek için genel olarak yeterli bilgi sağlamaz.

Örnek 7.2 Şekil 7.1'de gösterilen 2 derece sistemler hesaba kat. Ya simetrik transfer fonksiyonlarını hesaplayarak ve yerine koyarak ya da sistem boyunca $2A\cos(\omega t)$ girişini izleyerek tek ton girişler için kararlı durum yanıtlarının özdeş olduğu gösterilebilir. Ayrıca girişlerin farklı tipleri için yanıtların özdeş olduğu, bu açık olması gerektiği halde doğrulanabilir. Hesaplamalar sonuçların kötü olduğu kadar sıkıcıdır ve bu yüzden ayrıntıları atlıyorum.

(129)

(22)

(20)



Şekil 7.1. Örnek 7.2’de dikkate alınan sistemler

Bu durumu atlamanın bir yolu daha komplike giriş sinyali kullanmaktır. Örneğin, iki ton giriş için bir 2 derece sistem yanıtı dikkate al:

$$u(t) = 2A_1 \cos(\omega_1 t) + 2A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Örnek 5.5’den, simetrik transfer fonksiyon terimlerinde kararlı durum yanıtı

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) = & 2A_1^2 H_{2sym}(i\omega_1, -i\omega_1) + 2A_2^2 H_{2sym}(i\omega_2, -i\omega_2) \\ & + 4A_1 A_2 |H_{2sym}(-i\omega_1, i\omega_2)| \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \angle H_{2sym}(-i\omega_1, i\omega_2)] \\ & + 4A_1 A_2 |H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_2)| \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \angle H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_2)] \\ & + 2A_1^2 |H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_1)| \cos[2\omega_1 t + \angle H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_1)] \\ & + 2A_2^2 |H_{2sym}(i\omega_2, i\omega_2)| \cos[2\omega_2 t + \angle H_{2sym}(i\omega_2, i\omega_2)] \end{aligned}$$

tarafından verilmiştir. Şimdi ω_1 ve ω_2 ’nin (20)’de görünen diğer frekanslardan farklı olduğu gibi varsay. sonra bu kararlı durum frekans bileşenin genlik ve faz ölçümü kompleks $H_{2sym}(i\omega_1, i\omega_2)$ değerini verecektir.

Bu değerle ne yapılacağı tartışmasını geciktirme, yüksek derece homojen sistemler için nasıl ilerleneceği net olmalıdır. 3 derece durum taslağı çizmek için, üç ton giriş dikkate al

$$u(t) = 2A_1 \cos(\omega_1 t) + 2A_2 \cos(\omega_2 t) + 2A_3 \cos(\omega_3 t)$$

$n = 3, L = M = N = 1$ için bölüm 5.3 (46)’da uzmanlaşarak $e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t}$ katsayısı $3! A_1 A_2 A_3 H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3)$ ve $e^{-i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t}$ katsayısı $3! A_1 A_2 A_3 H_{3sym}(-i\omega_1, -i\omega_2, -i\omega_3)$ ’dır. Bu gerçek frekans

$$3! 2A_1 A_2 A_3 |H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3)| \cos[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t + \angle H_3(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3)]$$

terimini verir. Eğer ω_1, ω_2 ve ω_3 frekansları oransızsa, bu frekans terimi belirgin olacaktır ve bu yüzden genlik ve faz $H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3)$ değerini elde etmek için ölçülebilir. Bu sonuçlar n ton girişe yanıtın $H(i\omega_1, \dots, i\omega_n)$ ’nin değerini belirlemede kullanılabileceği yerde n derece duruma doğrudan genişletilir.

(24)

(23)

Yüksek derece homojen alt sistemlerinin düşük derece alt sistemlerinki gibi benzer frekanslarda kararlı durum yanıt terimlerine katılması şeklindeki gerçek tarafından polinom sistem durumunda bu transfer fonksiyon değerlendirmelerini bulmak fazlasıyla karışıktır. Basit bir örnek olarak, sadece 1 derece ve 3 derece homojen alt sistemlerden oluşmuş bir polinom sistem varsay. eğer $2A \cos(\omega t)$ girişi uygulanırsa o zaman karar durum yanıtı

$$y_{ss}(t) = 2A|H_1(i\omega)| \cos[\omega t + \angle H_1(i\omega)] \\ + 2A^3|H_{3sym}(i\omega, i\omega, -i\omega)| \cos[\omega t + \angle H_{3sym}(i\omega, i\omega, -i\omega)] \\ + 2A^3|H_{3sym}(i\omega, i\omega, i\omega)| \cos[3\omega t + \angle H_{3sym}(i\omega, i\omega, i\omega)]$$

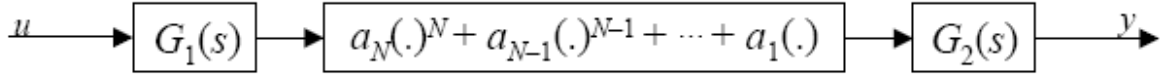
olur.

Tabi ki, ω frekansındaki iki terim standart özdeşlikler kullanılarak bir terimde birleştirilebilir. Fakat işaret, 3 derece homojen alt sistemin $H_1(i\omega)$ belirlemek için ihtiyaç duyulan frekans bileşenlerine katkıda bulunmasıdır.

Bu örneğe biraz daha fazla devam etmek öğreticidir. Sistemin giriş yanıtı

$$u(t) = 2A_1 \cos(\omega_1 t) + 2A_2 \cos(\omega_2 t) + 2A_3 \cos(\omega_3 t)$$

$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ frekansında bir terim içerecektir. Bundan başka, eğer üç giriş frekansı orantısızsa, bu bileşen belirgindir. Bu 3 derece alt sistem fonksiyon $H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3)$ değerinin tam önceki gibi belirlenebileceğini gösterir. Buna rağmen okuyucu kolayca $H_1(i\omega)$ değerlerini belirlemede zorlukların devam ettiğini doğrulayabilir. Örneğin $H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2)$, $H_{3sym}(i\omega_1, i\omega_3, -i\omega_3)$ ve $H_1(i\omega_1)$ hepsi karar durum yanıtında ω_1 frekansına katkıda bulunur. Bu durum simetrik transfer belirleme problemini değerlendirmelerinden yukarıya getirir, büyütür. Bunların ne olması gerektiği net olmadığı halde, özel varsayımların transfer fonksiyon yapısında lazım olacağı beklenir. Lineer durumda transfer fonksiyon $H(s)$ 'nin kesinlikle uygun oransal fonksiyon olduğu ve bazen $H(s)$ 'nin bilinen n derece olması varsayıldığı genelde varsayılmıştır. O zaman form $H(i\omega)$ değerlendirme kümesinden transfer fonksiyonu belirlemek için birçok metot vardır. Önceki çalışma için basit başlangıç noktası sağladığı halde n 'in bilindiğini varsaydığınız zaman bu yaklaşım gerçek dışıdır. Ne yazık ki böyle bir genel başlama noktası lineer olmayan durumda mevcut değildir. Böylece ben genel durumu terk edeceğim ve bir basit polinom sistemler sınıfıyla tek yaklaşım göstereceğim. Uygunca seri kısıtlamalar homojen alt sistem transfer fonksiyonu formunda yüklenecek böylece onlar frekans yanıt ölçümlerinden meydana çıkan tip değerlendirmelerden basitçe tanımlanabilecek.



Şekil 7.2 Bir ara bağlantı basamaklama

Şekil 7.2’de gösterilen ara bağlantı yapısına sahip olmak için bilinen, lineer alt sistemlerin stabil olduğu varsayıldığı yerde bilinmeyen lineer olmayan bir sistem varsay. Bundan başka, sabit çoklayıcılar yolun her numarasında basamaklamanın başından sonuna dağıtılabilecekleri için $G_1(0) = G_2(0) = 1$ olduğu varsayılır. Sistem için simetrik transfer fonksiyonlarının form

$$H_{nsym}(s_1, \dots, s_n) = a_n G_1(s_1) \dots G_1(s_n) G_2(s_1 + \dots + s_n), n = 1, 2, \dots, N$$

’e sahip olduğunu varsaymaya ara bağlantı yapısı eşittir. Bu yapısal varsayımın bir hayli sert olduğunu tekrarlamaya şiddetle ihtiyaç duyarım. Ancak, en azından ilkede, kararlı-durum frekans yanıtı basit ölçümlerinden alt sistem transfer fonksiyonları belirlemeye izin verilecek. Aslında, N ’in değeri ne olursa olsun, sadece tek ton girişler gerekecek. Şekil 7.2’de gösterilen formun bir sisteminin kararlı durum yanıtını kolayca hesaplamak için Bölüm 5.2’nin sonuçları uygulanabilir. $u(t) = 2A \cos(\omega t)$ girişi için kararlı durum yanıtı bu formda

$$y_{ss}(t) = f_0(A, i\omega) + 2 \sum_{n=1}^N |f_n(A, i\omega)| \cos[n\omega t + \angle f_n(A, i\omega)]$$

yazılabilir,

$$f_0(A, i\omega) = \sum_{k=1}^{[N/2]} \begin{bmatrix} 2k \\ k \end{bmatrix} A^{2k} a_{2k} G_1^k(i\omega) G_1^k(-i\omega)$$

$$f_n(A, i\omega) = \sum_{k=0}^{[N-n/2]} \begin{bmatrix} n+2k \\ n+k \end{bmatrix} A^{n+2k} a_{n+2k} G_1^{n+k}(i\omega) G_1^k(-i\omega) G_2(in\omega),$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

olduğu yerde, $[x]$ en büyük integer $\leq x$ gösterdiği yerde.

Lineer olmayan polinomda katsayılar ve lineer alt sistem transfer fonksiyonları belirlemek için kullanılan birkaç yaklaşım var. Tek ton girişler (sabit girişler içeren) gerektiren

(28)

ve görelî faz ölçümü gerektirmeyen çok basit bir metot tartışacağım. Ancak kısaca netleşecek sebepler için, $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ 'in minimum faz transfer fonksiyonları olduğu varsayılmalı.

(29)

Çeşitli genliklerde fonksiyon girişleri adımına karar durum yanıtını ölçerek $a_1, a_2, \dots, a_N$ katsayılarını belirlemek ilk adımdır. Sistemin $u(t) = A\delta_{-1}(t)$ 'ye karar durum yanıtı $y_{ss}(t) = a_1A + a_2A^2 + \dots + a_NA^N$ dır. Bu yüzden N farklı giriş genlikleri için $y_{ss}(t)$ 'nin sabit değerini ölçmek polinom ara değerlendirme ile katsayı değerlerini verir.

$G_1(s)$ ve $G_2(s)$ lineer alt sistem transfer fonksiyonları belirlemek $u(t) = 2A \cos(\omega t)$ formundaki girişlere karar durum yanıtının temel frekans bileşeninde genlik ölçümünden tamamlanacaktır. Bir başka deyişle A ve ω 'nın çeşitli değerleri için $|f_1(A, i\omega)|$ 'nin ölçümleri kullanılacaktır. Kesinlik için N 'in eski olduğu varsayılır böylece $f_1(A, i\omega)$ formunda

$$f_1(A, i\omega) = G_1(i\omega)G_2(i\omega) \left[Aa_1 + \binom{3}{2} A^3 a_3 |G_1(i\omega)|^2 + \dots + \left[\frac{N+1}{2} \right] A^N a_N |G_1(i\omega)|^{N-1} \right]$$

yazılabilir. $f_1(A, i\omega)$ ω 'nun bir basit karmaşık fonksiyonun bir ürününün ve ω 'nun bir karmaşık reel fonksiyonun formunda verildiği için, ilgili kare genlik fonksiyonunu

$$\begin{aligned} |f_1(A, i\omega)|^2 &= |G_1(i\omega)|^2 |G_2(i\omega)|^2 \left[Aa_1 + \left[\frac{3}{1} \right] A^3 a_3 |G_1(i\omega)|^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{N}{1} \right] A^N a_N |G_1(i\omega)|^{N-1} \right]^2 \\ &= A^2 a_1^2 |G_1(i\omega)|^2 |G_2(i\omega)|^2 + 2 \left[\frac{3}{2} \right] A^4 a_1 a_3 |G_1(i\omega)|^4 |G_2(i\omega)|^2 + \dots \\ &\quad + \left[\frac{N}{2} \right]^2 A^{2N} a_N^2 |G_1(i\omega)|^{2N} |G_2(i\omega)|^2 \end{aligned}$$

hesaplamak basit bir maddedir. Şimdi, uygunluk için $a_1, a_3 \neq 0$ varsayarak, bir kimlik stratejisi aşağıda gösterildiği gibi özetlenebilir. Sabit frekans ω_1 için, $|f_1(A, i\omega)|^2 A^2$ 'de bir polinomdur. Böylece yanıtların temellerinin genlik ölçümü ω_1 frekansıyla farklı genlik girişlerinin bir uygun numarası için katsayıların

$$P_1(\omega_1) = a_1^2 |G_1(i\omega_1)|^2 |G_2(i\omega_1)|^2$$

(33)

(34)

$$P_2(\omega_1) = a_1 a_3 |G_1(i\omega_1)|^4 |G_2(i\omega_1)|^2$$

polinom ara değerleme ile hesaplamasına izin verir. Bu yüzden,

$$|G_1(i\omega_1)|^2 = \frac{a_1^2}{a_1 a_3} \frac{P_2(\omega_1)}{P_1(\omega_1)}$$

$$|G_2(i\omega_1)|^2 = \frac{a_1 a_3}{a_1^4} \frac{P_1^2(\omega_1)}{P_2(\omega_1)}$$

ω_1 'in farklı değerleri için bu işlem tekrarlanabilir böylece lineer alt sistemler için kare genlik fonksiyonları, ω 'nın fonksiyonları gibi, tanımlanabilir. O zaman minimum faz varsayımı kullanmak ve $G_1(0) = G_2(0) = 1$ normalizasyon, transfer fonksiyonları , $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ lineer sistem teorisinde iyi bilinen metotlar kullanarak hesaplanabilir.

7.4 Gaussian Beyaz Gürültü Uyarımı Kullanarak Kimlik

Bu teknik sabit lineer sistemin kimliği için iyi bilinen çapraz korelasyon tekniğinin uzantısıdır. Kısaca gözden geçirmek için,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) u(t - \sigma) d\sigma$$

tarafından tanımlanan bir lineer sistem için girişlerin gerçek, sabit Gaussian beyaz gürültü ortalama sıfır ve yoğunluk A ile olduğunu varsay. sonra ürüne biçim vermek

$$y(t)u(t - T_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) u(t - \sigma) u(t - T_1) d\sigma, T_1 \geq 0$$

ve her iki tarafın beklenen değerini almak

$$E[y(t)u(t - T_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) E[u(t - \sigma)u(t - T_1)] d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) A \delta_0(\sigma - T_1) d\sigma = Ah(T_1)$$

'yi verir.

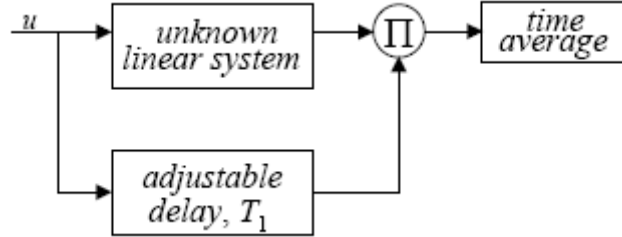
Böylece çekirdeğin değerleri (32)'ye dayanan belli giriş/çıkış deney çeşidinden elde edilebilir. Tabi ki, ergodicity varsayımının tamamlanmış olması gerçekleştirme bakış açısından çok önemlidir. Sonra beklenen değer, bir zaman ortalaması tarafından verildiği an için ve

(34)

(35)

$$h(T_1) = \frac{1}{A} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) u(t - T_1) dt$$

formunda tekrar yazılabilir. Bu kimlik yaklaşımının gerçekleştirilmesi, Şekil 7.3'te gösterilmiştir.



Şekil 7.3 Lineer bir sistemin çapraz-korelasyon kimliği.

Çok benzer bir analiz, bir n derece homojen sistemin simetrik çekirdeğinin değerlerini belirlemek için çok benzer bir prosedüre yol açar. Belirgin özellikler 2 derece durum tarafından açık yapılır, böylece sisteme girişin

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{2sym}(\sigma_1, \sigma_2) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

aynen önceki gibi Gaussian beyaz gürültüsü olduğunu varsay. Ben çekirdeğin terimler (aşağıya) eklendiği zaman açık olacak sebepler için simetrik olduğunu farz ederim. Şimdi $T_1, T_2 \geq 0, T_1 \neq T_2$ için

$$\begin{aligned} E[y(t)u(t - T_1)u(t - T_2)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h_{2sym}(\sigma_1, \sigma_2) E[u(t - \sigma_1)u(t - \sigma_2)u(t - T_1)u(t - T_2)] d\sigma_1 d\sigma_2 \end{aligned}$$

Sağ taraftaki beklenti

$$\begin{aligned}
E[y(t)u(t-T_1)u(t-T_2)] &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{2sym}(\sigma_1, \sigma_2) \delta_0(\sigma_2 - \sigma_1) \delta_0(T_2 - T_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ A^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{2sym}(\sigma_1, \sigma_2) \delta_0(T_1 - \sigma_1) \delta_0(T_2 - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ A^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{2sym}(\sigma_1, \sigma_2) \delta_0(T_2 - \sigma_1) \delta_0(T_1 - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&= A^2 \delta_0(T_2 - T_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_{2sym}(\sigma, \sigma) d\sigma + 2A^2 h_{2sym}(T_1, T_2)
\end{aligned}$$

'ı vermek için genişletilebilir. $T_1 \neq T_2$ için, (36)

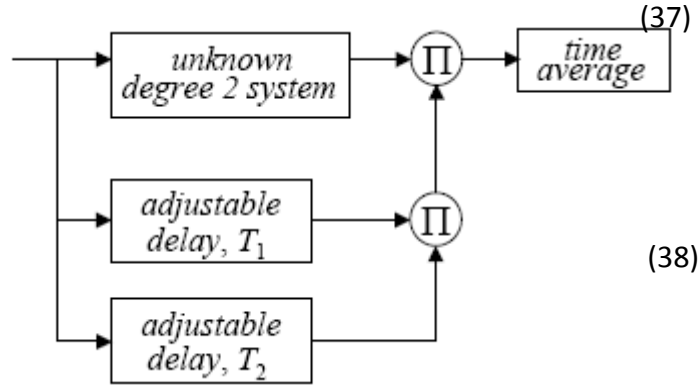
$$h_{2sym}(T_1, T_2) = \frac{1}{2A^2} E[y(t)u(t-T_1)u(t-T_2)]$$

Üretir. Ergodicity varsayımını uygulamak (37) 'ye zaman-ortalama formunda

(36)

$$h_{2sym}(T_1, T_2) = \frac{1}{2A^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)u(t-T_1)u(t-T_2)dt, T_1 \neq T_2$$

yazılmaya izin verir. (38)'in gerçekleştirilmesi, Şekil 7.4'te gösterilmiştir.



(38)

Şekil 7.4 İki derece sistem için çapraz-korelasyon Kimlik metodu.

$T_1 = T_2 \geq 0$ olduğunda, beyaz gürültü için $E[u^2(t)]$ bulunmadığından bu yaklaşım bozulur. Geleneksel olarak, bu, taleplerin her biri ile yana adım atılır: 1) metodun her uygulamasında, $u(t)$ gerçekten beyaz değildir, 2) $h_{2sym}(T, T)$ değerleri $T_1 \neq T_2$ için

$h_{2sym}(T_1, T_2)$ değerlerinin sürekli uzatmaları ile elde edilebilir. Her iki talep, uygun durumların altında geçerli olabilir, ama bu "Çapraz değer" konusunun önemli zorluklara sebep olabileceği sırası gelince görülecek.

Genel n derece homojen sistemler için, çapraz-korelasyon kimlik metodu $T_1, \dots, T_n$ 'in, belirgin, negatif olmayan sayılar olduğu yerde

$$h_{nsym}(T_1, \dots, T_n) = \frac{1}{n! A^2} E[y(t)u(t - T_1) \dots u(t - T_n)]$$

ilişkiye dayanır. Bu formülün üretimi, bir alıştırma olarak bırakılmıştır, aslında sonra bu bölümde bir hesaplamada içerilen çözüme.

Polinom sistemlerine çapraz-korelasyon yaklaşımının hesaba katılması için, 3 derece polinom sistemin kullanılacak:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\sigma_1)u(t - \sigma_1)d\sigma_1 \quad (39)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} h_{3sym}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)u(t - \sigma_1)u(t - \sigma_2)u(t - \sigma_3)d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$

giriş/çıkış çapraz-korelasyonun $E[y(t)u(t - T_1)u(t - T_2)u(t - T_3)]$ hesaplamak

$$E[y(t)u(t - T_1)u(t - T_2)u(t - T_3)]$$

$$= Ah_1(T_1)\delta_0(T_3 - T_2) + Ah_1(T_2)\delta_0(T_3 - T_1) + Ah_1(T_3)\delta_0(T_2 - T_1)$$

$$+ 3!A^3h_{3sym}(T_1, T_2, T_3)$$

verir. Böylece belirgin T_1, T_2, T_3 için, 3 derece polinom durum tam olarak

$$h_{3sym}(T_1, T_2, T_3) = \frac{1}{3!A^3} E[y(t)u(t - T_1)u(t - T_2)u(t - T_3)]$$

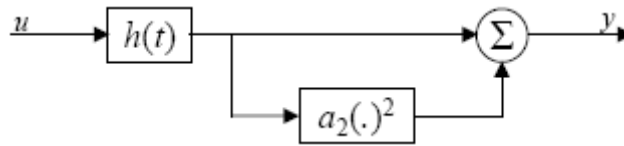
verilen 3 derece homojen durumdaki gibidir.

Çapraz -korelasyon $E[y(t)u(t - T_1)]$ hesaplamak

$$E[y(t)u(t - T_1)] = Ah_1(T_1) + 3A^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{3sym}(\sigma, \sigma, T_1)$$

'ı verir. Bu yüzden 1 derece çekirdek değerlerini belirlemek belirgin bütün argümanlar sız 3 derece çekirdeği içerir. (40)'daki integral terimi $h_{3sym}(\sigma, \sigma, T_1)$ 'in uygun yaklaşık değerlerini kullanarak doğru olarak yaklaşıklanamadıkça, 1 derece çekirdek değerleri izole edilemez. Tabi ki genellikle tamamen kısıtlayıcı, o durumu düzeltebilir hipotezler vardır. Çoğunlukla bu (40) hipotezler, bilinmeyen sistem için varsayılan bir ara bağlantı terimlerinde uygun olarak formüle edilebilir.

Örnek 7.2 Şekil 7.5'te gösterilen, ara bağlantı yapısına sahip olmak için bilinen bir sistem varsay.



Şekil 7.5. Bir 2 derece polinom sistem.

O zaman giriş/çıkış gösterimi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)u(t - \sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_2 h(\sigma_1)h(\sigma_2)u(t - \sigma_1)u(t - \sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2$$

formunda yazılabilir. Sıfır ortalamalıdan örnek fonksiyon olan bir örnekle, A yoğunluk ile beyaz Gaussian rastgele işlemleri, yanıtın ortalaması

$$\begin{aligned} E[y(t)u(t - T_1)u(t - T_2)] E[y(t)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) E[u(t - \sigma)] d\sigma \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_2 h(\sigma_1)h(\sigma_2) E[u(t - \sigma_1)u(t - \sigma_2)] d\sigma_1 d\sigma_2 = a_2 A \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

'dır. Giriş/çıkış çapraz korelasyon

$$\begin{aligned}
R_{yu}(\tau) &= E[y(t)u(t-\tau)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) E[u(t-\sigma)u(t-\tau)] d\sigma \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_2 h(\sigma_1) h(\sigma_2) E[u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)u(t-\tau)] d\sigma_1 d\sigma_2 = Ah(\tau)
\end{aligned}$$

tarafından verilmiştir. Böylece, çekirdeğin değerleri, giriş/çıkış çapraz-korelasyonlarından hesaplanabilir. Ve eğer değerlerin yeterli numarası integrale yaklaşmak için hesaplanırsa, o zaman yanıt ortalamasından sabit a_2 hesaplanabilir.

Polinom sistem durumunda karşılaşılan genel zorluklar, Wiener dikey temsili benimsenerek önlenebilir. (Wiener temsili kullanmak için başka bir önemli sebep, problem 7.5'te önerilmiştir.) Bir sistemin

$$y(t) = \sum_{n=0}^N G_n[k_n, u(t)]$$

tarafından tanımlanabileceğini,

$$\begin{aligned}
G_n[k_n, u(t)] &= \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i n! A^i}{2^i (n-2i)! i!} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i u(t \\
&\quad - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_{n-2i}) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n-2i}
\end{aligned} \tag{41}$$

bölüm 5.5'de verildiği gibi olduğu yerde varsay. bölüm 5.5'te notasyondan sonra, alt simge "sym"nin yokluğuna rağmen Wiener çekirdekleri simetriktir. Şimdi kimlik problemi, $G_n[k_n, u(t)], n = 0, 1, \dots, N$ belirleyen simetrik fonksiyon $k_n(t_1, \dots, t_n)$ belirleme problemi olarak görülebilir. (42)

Prosedür, Gaussian beyaz gürültü girişinin ertelenen versiyonlarının ürünlerini yeniden içerir. Örneğin bir ürün, $u(t-T_1), \dots, u(t-T_n)$ girişte bir n derece homojen operatör olarak görülebilir ve bu bakış açısı Wiener operatörlerinin dikey özelliğinin kullanımına izin verir. (Homojen operatör $u(t-T_1), \dots, u(t-T_n)$ itici çekirdekler kullanarak integral formda yazılabileceğini hatırla, fakat takip eden hesaplamalar için böyle yapmaya küçük sebep olmaya benzer.)

İlk olarak çıkışın beklenen değerinin

$$E[y(t)] = \sum_{n=0}^N E[G_n[k_n, u(t)]]$$

olduğunu ve Teorem 5.1'in kanıtında kurulmuş sonuçları kullanmak, 0 derece Wiener çekirdeğin

$$k_0 = E[y(t)]$$

tarafından verildiğini not et. 1 derece Wiener çekirdeği $k_1(t)$ 'nin değeri, $t \geq T_1$ da, takip eden gibi bulunur. İlk olarak, derece > 1 'in Wiener operatörlerinin şimdiye kadar kullanılan her 1 derece operatöre dikey olduğu şeklindeki gerçeğin olduğu yerde

$$\begin{aligned} E[y(t)u(t - T_1)] &= E \left[\sum_{n=0}^N G_n[k_n, u(t)]u(t - T_1) \right] \\ &= E[G_0[k_0, u(t)]u(t - T_1)] + E[G_1[k_1, u(t)]u(t - T_1)] \end{aligned} \quad (44)$$

Daha açık bir notasyonda

$$E[y(t)u(t - T_1)] = k_0 E[u(t - T_1)] + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma) E[u(t - \sigma)u(t - T_1)] d\sigma = A k_1(T_1) \quad (45)$$

Böylece

$$k_1(T_1) = \frac{1}{A} E[y(t)u(t - T_1)]$$

Tabi ki, bir ergodicity hipotezinin altında bu hesap, bir zaman ortalamasının olduğu gibi gerçekleştirilebilir. Ben şimdi, 2 derece Wiener çekirdeğin belirlenmesine devam ediyorum. Farklı negatif olmayan sayılar T_1 ve T_2 için, $k_2(T_1, T_2)$ değerlendirme

(50)

$$\begin{aligned}
E[y(t)u(t-T_1)u(t-T_2)] &= E \left[\sum_{n=0}^N G_n[k_n, u(t)] u(t-T_1) u(t-T_2) \right] \\
&= E \left[k_0 u(t-T_1) u(t-T_2) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma) u(t-\sigma) u(t-T_1) u(t-T_2) d\sigma \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma_1, \sigma_2) u(t-\sigma_1) u(t-\sigma_2) u(t-T_1) u(t-T_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&\quad \left. - A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\sigma, \sigma) d\sigma u(t-T_1) u(t-T_2) \right] = A k_0 \delta_0(T_1 - T_2) + 2A^2 k_2(T_1, T_2)
\end{aligned}$$

not ederek bulunabilecektir. Böylece, $T_1 \neq T_2$ için,

$$k_2(T_1, T_2) = \frac{1}{2A^2} E[y(t)u(t-T_1)u(t-T_2)] \quad (47)$$

$m (\leq N)$ derece Wiener çekirdeği, benzer bir formda değerlendirilir. Farklı negatif olmayan sayılar $T_1, \dots, T_m$ için, hesaplama aşağıda gösterildiği gibi ana hatları çizilebilir:

$$E[y(t)u(t-T_1) \dots u(t-T_m)] = E \left[\sum_{n=0}^N G_n[k_n, u(t)] u(t-T_1) \dots u(t-T_m) \right] \quad (48)$$

Dikeysel özellik,

$$E[y(t)u(t-T_1) \dots u(t-T_m)] = \sum_{n=0}^m E[G_n[k_n, u(t)] u(t-T_1) \dots u(t-T_m)] \quad (49)$$

Daha açık bir notasyona dönüştürmek ve (42) kullanmak

(53)

$$\begin{aligned}
& E[y(t)u(t-T_1) \dots u(t-T_m)] \\
&= \sum_{n=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) E[u(t-\sigma_1) \dots u(t-\sigma_n)u(t-T_1) \dots u(t \\
&\quad -T_m)] d\sigma_1 \dots d\sigma_n \\
&+ \sum_{n=0}^m \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^i n! A^i}{2^i (n-2i)! i!} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2i}, \tau_1, \tau_1, \dots, \tau_i, \tau_i) E[u(t \\
&\quad -\sigma_1) \dots u(t-\sigma_{n-2i})u(t-T_1) \dots u(t-T_m)] d\tau_1 \dots d\tau_i d\sigma_1 \dots d\sigma_{n-2i}]
\end{aligned}$$

verir. (51)'de ilk toplamada, beklenen değer, dürtülerin ürünlerinin bir toplamı olarak tekrar yazılabilir. $n = m$ olduğu zaman entegrasyonun ileri analizleri, terimlerin iki tipinin: bir çarpan $\delta_0(T_i - T_j)$ içeren ve hiç dürtü içermeyen fakat tersine $T_1, \dots, T_m$ argümanlarının bazı permütasyonu için çekirdeğin bir değerlendirmesi, meydana çıkacağını gösterir. T_j 'ler farklı olduğu için, dürtüyle çarpanıyla beraber bütün terimler sıfır olacak ve çekirdeğin simetrisi $m! A^m k_m(T_1, \dots, T_m)$ ile kalan terimlerin verdiği gösterilebilir. (51)' de ilk toplamada $n < m$ olduğunda iki durum vardır. Eğer $n + m$ tekse, o zaman beklenen değer sıfırdır. Eğer $n + m$ çiftse, o zaman beklenen değerdeki her terim $\delta_0(T_i - T_j)$ formunda bir çarpan içerecektir ve bundan dolayı yeniden sıfır elde edilir. Benzer sebepler için, (51) de ikinci toplamada bütün terimler 0 verir. Böylece, T_j 'lerin farklı olduğu hipotezinin altında

$$k_m(T_1, \dots, T_m) = \frac{1}{m! A^m} E[y(t)u(t-T_1) \dots u(t-T_m)]$$

Okuyucu şüphesiz olarak, şimdiye kadar farklı T_j varsayımının kritik doğasıyla ikna edilir. Maalesef, o ilgilenilen simetrik Volterra çekirdeği olduğu zaman, önemli bir zorluğa sebep olur. (41) Wiener gösterimini Volterra serileri gösterimine çevirmek için, (41)'de olduğu derecede çeşitli terimler beraber toplanmalıdır. Teorem 5.3 hatırlamak, (41)'de sistemin bir Volterra serileri gösteriminde n derece simetrik çekirdek

$$h_{nsym}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{m=0}^{(N-n)/2} \frac{(-1)^m (n+2m)! A^m}{n! m! 2^m}$$

$$\int_0^{\infty} k_{n+2m}(t_1, \dots, t_n, \sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma_m) d\sigma_1 \dots d\sigma_m$$

tarafından verilmiştir. belirli argümanlar için simetrik Volterra çekirdek çiftinin değerlerinin belirsiz argümanlar için Wiener çekirdeğinin değerlerine dayandığı açıktır.

Çapraz zorluktan kaçınmak için bir yol, çekirdek değerlerinin hesaplanmasında tam $y(t)$ yanıtından çok artan

$$y(t) = \sum_{n=0}^{m-1} G_n[k_n, u(t)] \quad (54)$$

'ü kullanmaktır. Her negatif olmayan $T_1, \dots, T_m$ için, O gösterilebilir

$$k_m(T_1, \dots, T_m) = \frac{1}{m! A^m} E \left[y(t) - \sum_{n=0}^{m-1} G_n[k_n, u(t)] u(t - T_1) \dots u(t - T_m) \right] \quad (55)$$

Örnek 7.3 Belirgin olmayan argümanlar için çekirdek değerleri belirlemede zorluk, ayrık zaman durumunda ortaya çıkmaz. Giriş durağan, sıfır ortalamalı, A şiddet ile beyaz Gaussian rastgele işlem olduğu zaman, Teorem 6.9 takip eden ilişkileri vermek için Örnek 6.8'in sonuçlarını kullanmak basitleştirilebilir.

$$k_0 = E[y(k_0)]$$

$$k_1(i_1) = \frac{1}{A} E[y(k_0)u(k_0 - i_1)]$$

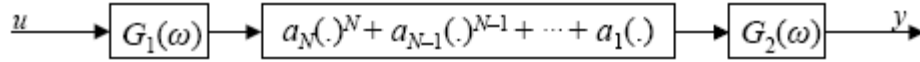
$$k_2(i_1, i_2) = \begin{cases} \frac{1}{2A^2} E[y(k_0)u(k_0 - i_1)u(k_0 - i_2)], & i_1 \neq i_2 \\ \frac{1}{2A^2} E[y(k_0)(u^2(k_0 - i_1) - A)], & i_1 = i_2 \end{cases}$$

Daha yüksek-derece çekirdekler, benzer formüller tarafından verilir.

Volterra çekirdeklerinin durumunda olduğu gibi, Wiener çekirdeklerinin değerlerinin nasıl kullanılması sorusu zordur. Ben özel ara bağlantı yapısının varsayıldığı ileri durumları araştırarak yeniden bir yaklaşım göstereceğim. Değişimin gidişatında Volterra serileri ve

Wiener serileri gösterimlerini işlemek için araçların bir numarasını denemeye olay olacağı bir yan faydadır.

Şekil 7.6'da, iki lineer sistemin stabil, minimum faz ve $G_1(0) = G_2(0) = 1$ gibi varsayıldığı yerde gösterilen ara bağlantı yapısına sahip olmak için bilinen bir bilinmeyen sistem varsay. Burada Fourier dönüşüm notasyonun kullanıldığını böylece lineer alt sistemlerin sistem fonksiyonlarının terimlerinde belirtildiğini not et.



Şekil 7.6. Bir bilinen ara bağlantı yapısı.

Transfer fonksiyonları durumunda gibi ilerleyerek, alt sistem sistem fonksiyonlarının terimlerinde, Volterra sistem fonksiyonları

$$H_{nsym}(\omega_1, \dots, \omega_n) = a_n G_1(\omega_1) \dots G_1(\omega_n) G_2(\omega_1 + \dots + \omega_n), n = 1, 2, \dots, N \quad (56)$$

tarafından verildiğini göstermek basittir. Daha sonra, problem 5.14'ten, Wiener sistem fonksiyonları, Wiener çekirdeğinin Fourier dönüşümleri

$$K_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{j=0}^{[(N-n)/2]} \frac{(n+2j)! A^j a_{n+2j}}{n! j! 2^j} G_1(\omega_1) \dots G_1(\omega_n) G_2(\omega_1 + \dots + \omega_n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\gamma) G_1(-\gamma) d\gamma \right]^j \quad (57)$$

Tarafından verilir. Tek değişken Fourier dönüşümleri için Parseval bağıntısını kullanmak

$$K_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{j=0}^{[(N-n)/2]} \frac{(n+2j)! A^j a_{n+2j}}{n! j! 2^j} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(\tau) d\tau \right]^j G_1(\omega_1) \dots G_1(\omega_n) G_2(\omega_1 + \dots + \omega_n)^j, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (58)$$

verir.

Şimdi, çapraz korelasyon metodunun sonuçlarından, 1 derece Wiener çekirdeğinin değerlerinin yeterli bir numarasının $K_1(\omega)$ 'in hesaplanmasına izin vermesinin elde edilmesi varsayılacaktır. Sonra, (58)

$$K_1(\omega) = \sum_{j=0}^{[(N-1)/2]} \frac{(1+2j)! A^j a_{1+2j}}{j! 2^j} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(\tau) d\tau \right]^j G_1(\omega) G_2(\omega) \quad (59)$$

'u verir. Yani $G_1(\omega)G_2(\omega)$ ürünü bir bilinmeyen sabite kadar belirlenmiştir.

Ayrıca 2 derece Wiener çekirdeğinin değerlerinin yeterli bir numarasının $K_2(\omega_1, \omega_2)$ 'in hesaplanmasına izin vermesinin elde edilmesini varsay. o zaman (58)

$$K_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j=0}^{[(N-2)/2]} \frac{(2+2j)! A^j a_{2+2j}}{2! j! 2^j} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(\tau) d\tau \right]^j G_1(\omega_1) G_1(\omega_2) G_2(\omega_1 + \omega_2) \quad (60)$$

'ı verir. Yani $G_1(\omega_1)G_1(\omega_2)G_2(\omega_1 + \omega_2)$ ürünü bir bilinmeyen sabite kadar belirlenmiştir.

İlk iki Wiener sistem fonksiyonlarından $G_1(\omega)$ ve $G_2(\omega)$ 'nin nasıl elde edileceğini göstermek için α_1 ve α_2 'nin bilinmeyen sabit olduğu yerde,

$$K_1(\omega) = \alpha_1 G_1(\omega) G_2(\omega)$$

$$K_2(\omega_1, \omega_2) = \alpha_2 G_1(\omega_1) G_1(\omega_2) G_2(\omega_1 + \omega_2)$$

yazmak uygundur. O zaman, her ω için,

$$\frac{K_2(-\omega/2, \omega)}{K_1(\omega/2)} = \frac{|\alpha_1| |K_1(\omega)|}{|\alpha_2| |G_1(\omega)|}$$

olduğunu kontrol etmek kolaydır böylece

$$|G_1(\omega)| = \frac{|\alpha_1| |K_2(-\omega/2, \omega)|}{|\alpha_2| |K_1(\omega/2)|}$$

göre $G_1(\omega)$ 'nin genlik spektrumu bilinmeyen sabite kadar belirlenir. Tabi ki bu

$$|G_2(\omega)| = \frac{1}{|\alpha_1|} \frac{|K_1(\omega)|}{|G_1(\omega)|}$$

göre $G_2(\omega)$ 'nin genlik spektrumu bilinmeyen sabite kadar belirlendiğini ima eder. Minimum faz ve normalizasyon varsayımlarını kullanarak $G_1(\omega)$ ve $G_2(\omega)$ 'yi hesaplamak lineer sistem teorisinde iyi bilinen bir problemdir. Kimlik probleminin ileri düşüncesi, özel olarak,

nonlinearlikte katsayıların belirlenmesi Problem 7.8'e bırakılır. Fakat N derece polinom sistem giriş/çıkış çapraz korelasyonun tam iki çeşidinden belirlenebileceği yerde, lineer alt sistemin nasıl not edileceği önemlidir.

7.5 Wiener Çekirdeklerinin Dikey Genişletilmesi

Wiener çekirdek değerlerinin kullanımındaki zorluklardan dolayı, dikey genişletme yaklaşımı önemli bir alternatif olabilir. Temel fikir, Bölüm 7.1'de kısaca tartışıldığı gibi, bölüm 7.1'de kısaca tartışıldığı gibi, $L_2(0, \infty)$ Hilbert alanı için, ortonormal temelinin terimlerinde bilinmeyen sistemin Wiener çekirdeği gösterimi ve o zaman bu ortonormal genişlemede katsayıları belirlemedir. Tekrar, kullanılan giriş sinyali gerçek, durağan, sıfır ortalamalı, A şiddet ile beyaz Gaussian rastgele işlemdir.

Bilinmeyen sistemin Wiener dikey gösteriminin terimlerinde tanımlanabileceğini varsay. bundan başka her bir Wiener çekirdeği $k_n(t_1, \dots, t_n)$ 'nin takip eden yolda gösterilebileceğini varsay. $\phi_1(t), \phi_2(t)$ 'ye $L_2(0, \infty)$ de ortonormal temel olmaya izin ver.

Yani (61)

$$\int_0^{\infty} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

O zaman, bu temelin terimlerinde her bir Wiener çekirdeğini, (62)

$$k_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_n=1}^{\infty} k_{i_1 \dots i_n} \phi_{i_1}(t_1) \dots \phi_{i_n}(t_n)$$

formunda (63)

$$k_{i_1 \dots i_n} = \int_0^{\infty} k_n(t_1, \dots, t_n) \phi_{i_1}(t_1) \dots \phi_{i_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

olduğu yerde yaz. $i_1 \dots i_n$ 'nin her permütasyon π için, Wiener operatörlerinin kullanımında örtülü simetri hipotezleri ile

$$k_{i_1 \dots i_n} = k_{(\pi) i_1 \dots (\pi) i_n}$$

Tabi ki, genişleme (62) uygulamada terimlerin bazı sonlu numarası kırılacaktır, o sebeple bir yaklaşık gösterim üreterek. Kimlik problemi şimdi, $k_{i_1 \dots i_n}$ genişleme katsayıları belirlemenin terimlerinde poz verir.

0 derece Wiener çekirdeği için, $k_0 = E[y(t)]$ olduğundan tartışılacak bir şey yoktur. 1 derece Wiener çekirdeği için,

$$k_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \phi_i(t)$$

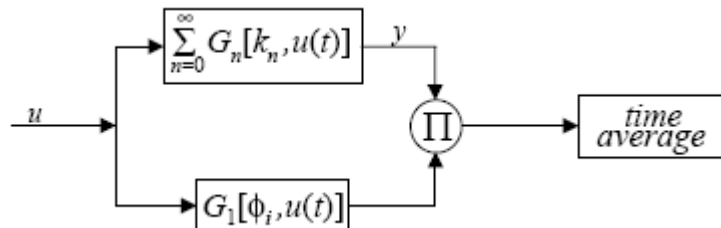
i^{th} katsayısı takip eden çapraz korelasyon hesaplamasına göre:

$$\begin{aligned} E \left[y(t) \int_0^{\infty} \phi_i(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma \right] &= E \left[\sum_{n=0}^{\infty} G_n[k_n, u(t)] \int_0^{\infty} \phi_i(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma \right] \\ &= k_0 \int_0^{\infty} \phi_i(\sigma) E[u(t-\sigma)] d\sigma \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_1(\tau) \phi_i(\sigma) E[u(t-\tau) u(t-\sigma)] d\tau d\sigma = A \int_0^{\infty} k_1(\tau) \phi_i(\tau) d\tau = A k_i \end{aligned} \quad (66)$$

tanımlanabilir. Notasyonun terimlerinde yüksek derece durumlarda kullanılması için, (66)

$$k_i = \frac{1}{A} E \left[y(t) G_1[\phi_i, u(t)] \right]$$

gibi yazılabilir. Eğer ergodicity varsayılırsa, çapraz korelasyon zaman ortalama ile hesaplanabilir. O zaman kimlik metodu Şekil 7.6 gösterildiği gibi bilinen sistem $G_1[\phi_i, u(t)]$ ile bilinmeyen sistemin çarpılabilen bağlantısının terimlerinde çizilebilir.

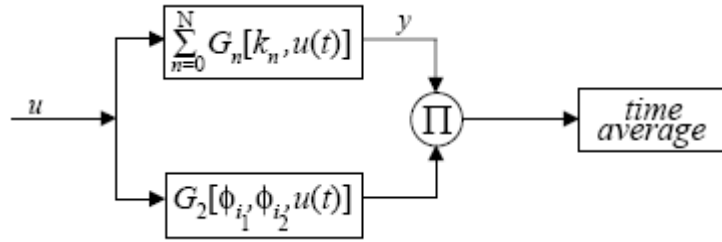


Şekil 7.7. $k_1(t)$ için katsayı kimlik metodu.

Wiener çekirdek $k_2(t_1, t_2)$ için $k_{i_1 i_2}$ katsayısının belirlenmesi, bilinmeyen sistemin Wiener operatörü

$$G_2[\phi_{i_1} \phi_{i_2}, u(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{2} [\phi_{i_1}(\tau_1) \phi_{i_2}(\tau_2) + \phi_{i_1}(\tau_2) \phi_{i_2}(\tau_1)] u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - A \int_0^\infty \phi_{i_1}(\tau) \phi_{i_2}(\tau) d\tau \quad (68)$$

tarafından bilinen sistem ile çarpılabilen paralelde bağlandığı yerde Şekil 7.7 de gösterildiği gibi çizilebilir. (Wiener operatör notasyonunun, $\phi_{i_1} \phi_{i_2}$ 'nin simetrik versiyonunu yazmaya kaçınmak az kötüye kullanılır.)



Şekil 7.8. $k_2(t_1, t_2)$ için katsayı kimlik metodu.

Wiener operatörünün dikey özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
E \left[y(t) G_2 \left[\phi_{i_1} \phi_{i_2}, u(t) \right] \right] &= E \left[\sum_{n=0}^{\infty} G_n[k_n, u(t)] G_2 \left[\phi_{i_1} \phi_{i_2}, u(t) \right] \right] \\
&= E \left[G_2[k_2, u(t)] G_2 \left[\phi_{i_1} \phi_{i_2}, u(t) \right] \right] \\
&= E \left[G_2[k_2, u(t)] \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left[\phi_{i_1}(\tau_1) \phi_{i_2}(\tau_2) + \phi_{i_1}(\tau_2) \phi_{i_2}(\tau_1) \right] u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) \right. \\
&\quad \left. - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} k_2(\sigma_1, \sigma_2) \left[\phi_{i_1}(\tau_1) \phi_{i_2}(\tau_2) \right. \\
&\quad \left. + \phi_{i_1}(\tau_2) \phi_{i_2}(\tau_1) \right] E[u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2)] d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad - A \int_0^{\infty} k_2(\sigma, \sigma) \phi_{i_1}(\tau_1) \phi_{i_2}(\tau_2) E[u(t - \tau_1) u(t - \tau_2)] d\sigma d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\tag{70}$$

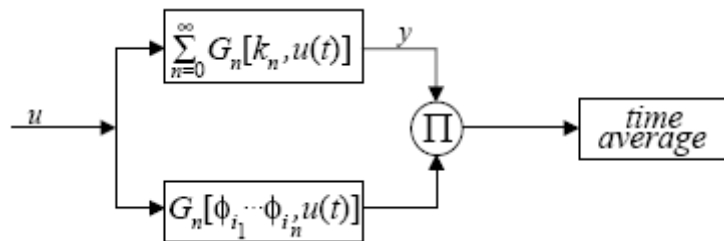
'dır. Beklenen değerlerin hesaplanması

$$E \left[y(t) G_2 \left[\phi_{i_1} \phi_{i_2}, u(t) \right] \right] = 2A^2 \frac{1}{2} [k_{i_1 i_2} + k_{i_2 i_1}] = 2A^2 k_{i_1 i_2} \tag{71}$$

üretmek için alışlagelmiş biçimde gider. Yani,

$$k_{i_1 i_2} = \frac{1}{2} E \left[y(t) G_2 \left[\phi_{i_1} \phi_{i_2}, u(t) \right] \right]$$

$k_n(t_1, \dots, t_n)$ n derece Wiener çekirdek için genişleme katsayıları için kimlik yordamı tam aynı yolda ilerler. (69)'la ilgili hesaplamalar çok karmaşıktır, fakat bu çağrılan önceki sonuçlar tarafından önlenebilir. Şekil 7.9'da gösterilen başlangıç noktası



Şekil 7.9. $k_n(t_1, \dots, t_n)$ için katsayı kimlik metodu.

Dikey özelliğin uygulaması hemen

$$E \left[y(t) G_n \left[\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}, u(t) \right] \right] = E \left[G_n [k_n, u(t)] G_n \left[\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}, u(t) \right] \right]$$

Şimdi Teorem 5.2'nin kanıtının az farklısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} E \left[G_n [k_n, u(t)] G_n \left[\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}, u(t) \right] \right] \\ = n! A^n \int_0^\infty k_n(t_1, \dots, t_n) \frac{1}{n!} \sum_{\pi(\cdot)} \phi_{i_1}(t_{\pi(1)}) \dots \phi_{i_n}(t_{\pi(n)}) dt_1 \dots dt_n \\ = n! A^n \int_0^\infty k_n(t_1, \dots, t_n) \phi_{i_1}(t_1) \dots \phi_{i_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n = n! A^n k_{i_1 \dots i_n} \end{aligned} \quad (74)$$

göstermek kolaydır. Bu genel formülü verir

$$k_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{n! A^n} E \left[y(t) G_n \left[\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}, u(t) \right] \right]$$